

目录

第八章 施瓦西解以及广义相对论经典检验	2
8.1 球对称性与度规	2
8.2 联络与曲率的计算	4
8.2.1 如何计算克里斯托夫联络	4
8.2.2 计算球对称时空的联络和曲率	6
8.3 施瓦西解	8
8.3.1 真空爱因斯坦方程	8
8.3.2 施瓦西解	9
8.4 粒子在施瓦西时空中的运动	12
8.4.1 粒子在球对称时空中的运动	12
8.4.2 光线偏折再回顾	15
8.4.3 水星近日点进动	17

第八章 施瓦西解以及广义相对论 经典检验

陈童

爱因斯坦场方程是一个关于度规场 $g_{\mu\nu}$ 的高度非线性的方程，非常难以精确求解。然而，1915年爱因斯坦发表他的场方程以后，身处一战战场的施瓦西很快就得到了第一个非平凡精确解，并在1915年12月22日将结果寄给了爱因斯坦，这就是本章将要讲述的施瓦西解。

施瓦西得到精确解的关键点在于充分利用对称性来约束 $g_{\mu\nu}$ 的独立分量个数。具体来说，施瓦西假设考察的是一个空间部分具有球对称性的时空。其次，施瓦西假设考察的是没有物质分布的真空部分的解，因此施瓦西解可以描述一个质点或者一个球对称星体外部的引力场。

本章将要讲述的第二部分内容有关广义相对论的一些经典检验，主要是具体推导引力场中的光线偏折以及推导广义相对论效应下的行星近日点进动，以和天文观测进行比较。

8.1 球对称性与度规

时空对称性的系统性考量需要用到基林矢量场的概念，这个我们将在后面的章节中介绍。本章我们仅仅是初识对称性分析的威力，对于本章的目的而言，广义坐标协变性结合球对称性的直观考量就已经足够了。

如果没有对称性的约束，那么度规场 $g_{\mu\nu}(x)$ 作为一个二阶对称张量，它将有 $4 \cdot (4+1)/2 = 10$ 个独立分量，考虑到广义坐标的任意性，其中有4个分量是冗余的，剩下6个独立分量是真正需要通过爱因斯坦场方程来确定的，作为广义坐标的函数，每个独立分量又是一个含4个自变量的函数。然而，正如我们将要看到的，在球对称性的约束下，真正的独立分量将只有两个，而且每个独立分量仅仅是含两个自变量的函数。

考察球对称性的方便坐标当然是球坐标，在球坐标下，具有球对称性(即在绕球心的旋转下保持不变)的函数只能是时间 t 和径向坐标 r 这两个自变量的函数，而具有球对称性的二次微元就只有 dt^2 、 $dt dr$ 、 dr^2 以及 $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ ，其中 $d\Omega^2$ 就是两维单位球面 S^2 上的标准度规。所以具有球对称性的最一般度规将具有如下形式，

$$ds^2 = -U(t, r)dt^2 - 2V(t, r)dt dr + W(t, r)dr^2 + (X(t, r))^2 d\Omega^2. \quad (8.1)$$

但是，以上并没有考虑广义坐标协变性，考虑到这个，则我们可以重新定义径向坐标 $r' = X(t, r)$ ，进而 $dr' = \partial_t X(t, r)dt + \partial_r X(t, r)dr$ 。由此可以消去(8.1)中的 r 和 dr ，进而将度规写成 $ds^2 = -U'(t, r')dt^2 - 2V'(t, r')dt dr' + W'(t, r')dr'^2 + r'^2 d\Omega^2$ 的形式。为了方便起见，不妨去掉所有的'号，重命名各个变量，进而即知具有球对称性的一般度规必定可以写成

$$ds^2 = -U(t, r)dt^2 - 2V(t, r)dt dr + W(t, r)dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (8.2)$$

这里的 U, V, W 当然和(8.1)中的 U, V, W 不是一回事，我们只是用了同样的记号而已。

下面我们将表面，广义协变性能够进一步去除(8.2)式中的 $-2V(t, r)dt dr$ 项。为此我们只需引入某个合适的函数 $\Phi(t, r)$ ，并定义新的时间变量 $t' = \Phi(t, r)$ ，从而 $dt' = \partial_t \Phi(t, r)dt + \partial_r \Phi(t, r)dr$ 。其中函数 $\Phi(t, r)$ 是这么决定的，我们要求 $dt' = \partial_t \Phi(t, r)dt + \partial_r \Phi(t, r)dr = \lambda(t, r)(Udt + Vdr)$ ，式中 $\lambda(t, r)$ 为某待定函数。很显然，只要能确定 $\lambda(t, r)$ ，那 $\Phi(t, r)$ 就跟着确定了。为了找到 $\lambda(t, r)$ ，我们注意到 $\lambda U = \partial_t \Phi(t, r)$ ， $\lambda V = \partial_r \Phi(t, r)$ ，从而 $\partial_r(\lambda U) = \partial_t(\lambda V)$ ，根据这个式子可知，给定 $U(t, r)$ 和 $V(t, r)$ ，以及给定 $\lambda(t, r)$ 在0时刻的初始值 $\lambda(0, r)$ ，那我们就可以通过将 $\partial_t(\lambda V) = \partial_r(\lambda U)$ 对 t 积分进而确定任意时刻 t 的 $\lambda(t, r)$ ，总之，我们总能找到合适的函数 $\lambda(t, r)$ ，使得 $dt' = \lambda(t, r)(Udt + Vdr)$ 。

进而即有 $dt'^2 = \lambda^2(U^2 dt^2 + 2UV dt dr + V^2 dr^2) = \lambda^2[U(U dt^2 + 2V dt dr) + V^2 dr^2]$ ，即 $-U dt^2 - 2V dt dr = -\frac{1}{\lambda^2 U} dt'^2 + \frac{V^2}{U} dr^2$ 。代入(8.2)式并用新变量 t' 来

消去 t ，即知度规一定能够写成 $ds^2 = -\frac{1}{\lambda^2 U} dt'^2 + (\frac{V^2}{U} + W) dr^2 + r^2 d\Omega^2$ 。去掉 t' 上的'号，并重命名各个变量，即知球对称时空的度规一定能够写成如下形式

$$ds^2 = -A(t, r) dt^2 + B(t, r) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (8.3)$$

这就是我们最终要找的结果，显然它只有两个独立分量，分别由函数 $A(t, r)$ 和函数 $B(t, r)$ 所刻画。

上式有非常清楚的几何含义，它告诉我们：给定一个时刻 t ，空间几何层化为一些同心球面，这些球面的面积为 $4\pi r^2$ ，而两个相邻球面之间的空间距离为 $\sqrt{B} dr$ 。而对于一个位于给定 r 处的观察者来说，在无穷小时间 dt 之内，他所经历的固有时流逝为 $\sqrt{A} dt$ 。

8.2 联络与曲率的计算

8.2.1 如何计算克里斯托夫联络

给出一个待定的度规场 $g_{\mu\nu}(x)$ ，为了代爱因斯坦场方程，就需要计算里奇曲率张量和曲率标量，为此我们又需要首先计算出克里斯托夫联络。当然可以直接代克里斯托夫联络的定义式计算，但这很容易出错漏，下面我们介绍一种计算克里斯托夫联络的有用技巧。

考虑时空中的一条世界线 $x^\mu(\lambda)$ ， λ 为世界线的参数，考虑如下作用量

$$S = \int d\lambda \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \quad (8.4)$$

当然，这个作用量并不是一个真实粒子的作用量，它只是我们用来辅助计算克里斯托夫联络的东西，之所以用这个辅助作用量而不用真实粒子的作用量，是因为这个作用量的变分比粒子作用量的变分要好算很多。

对上面这个作用量变分，不难得到

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int d\lambda \left[g_{\sigma\rho} \frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right] \delta x^\rho \\ &= - \int d\lambda g_{\sigma\rho} \left[\frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right] \delta x^\rho. \end{aligned} \quad (8.5)$$

利用最小作用量原理 $\delta S[x(\lambda)] = 0$ ，即可得到运动方程

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (8.6)$$

注意, 如果 λ 是固有时参数, 那这个运动方程就正好是测地线方程。

当然, 对于我们的目的来说, 并不一定需要将 λ 取作固有时(当然最终取成固有时也可以)。我们的关键技巧在于, 给出一个 $g_{\mu\nu}$, 我们就把它代入到辅助作用量(8.4)中, 然后对这个辅助作用量变分得出运动方程, 最后将所得的方程与标准形式(8.6)进行比较, 从这个比较中就能读出所有非零的联络系数。

相比于直接代联络的定义式进行计算, 这个方法至少有两个好处: 一是在实际应用中常常会有很多联络系数分量取零, 但是不算一遍人们又无从知道它们是零, 而在上述方法中, 取零的那些联络系数对计算过程自动就没有贡献; 第二, 联络系数的独立分量数目太多, 一个分量一个分量地代定义式计算就会太繁琐(指手算, 而不是用数学软件来推导), 而且很容易遗漏, 但是上述方法是同时算出所有的非零联络系数, 繁琐程度就大大降低了。

下面举例说明上述方法的运用。比如考虑两维球面, 其度规为

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (8.7)$$

由此即有辅助作用量

$$S = \int d\lambda \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right]. \quad (8.8)$$

对这个作用量变分, 就能得到如下两个运动微分方程

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d}{d\lambda} \left(\sin^2\theta \frac{d\phi}{d\lambda} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (8.9)$$

其中第一个方程已经是(8.6)式那样的标准形式, 将第2个方程也化成标准形式, 得

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + 2 \cot\theta \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0. \quad (8.10)$$

将这些标准形式的方程与定义式(8.6)进行比较, 就能读出非零的联络系数, 为

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot\theta. \quad (8.11)$$

其余联络系数都为零。

为了检验这些联络系数是否算对，我们不妨进一步计算一下黎曼曲率张量。根据黎曼曲率张量的代数性质，在两维中它只有一个独立的非零分量，为

$$R^{\theta}_{\phi\theta\phi} = \partial_{\theta}\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} - \partial_{\phi}\Gamma^{\theta}_{\theta\phi} + \Gamma^{\theta}_{\theta i}\Gamma^i_{\phi\phi} - \Gamma^{\theta}_{\phi i}\Gamma^i_{\theta\phi}. \quad (8.12)$$

式中 $i = \theta, \phi$ 。注意到有不少联络系数为零，然后再代入上面的那些非零联络系数，即可得

$$\begin{aligned} R^{\theta}_{\phi\theta\phi} &= \partial_{\theta}\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} - \Gamma^{\theta}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} \\ &= (\sin^2\theta - \cos^2\theta) - (-\sin\theta\cos\theta)(\cot\theta) = \sin^2\theta. \end{aligned} \quad (8.13)$$

进而即有

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = g_{\theta\theta}R^{\theta}_{\phi\theta\phi} = \sin^2\theta. \quad (8.14)$$

进而可以算得截面曲率，为

$$K = \frac{R_{\theta\phi\theta\phi}}{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 1. \quad (8.15)$$

两维曲面的截面曲率也叫高斯曲率，单位球面的高斯曲率当然为1，与这里的计算完全吻合。

还可以算得里奇张量的各分量为

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi} &= R^{\theta}_{\phi\theta\phi} = \sin^2\theta, \quad R_{\theta\theta} = R^{\phi}_{\theta\phi\theta} = g^{\phi\phi}R_{\phi\theta\phi\theta} = 1. \\ R_{\theta\phi} &= R_{\phi\theta} = 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

从而可以进一步算得里奇标量，为

$$R = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi} = 2. \quad (8.17)$$

的确，两维曲面的里奇标量就应该是高斯曲率的两倍，这是由它们各自的定义决定的。

8.2.2 计算球对称时空的联络和曲率

前面说过，球对称时空的度规必定可以写成如下形式

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + B(t, r)dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (8.18)$$

然后我们又介绍了计算克里斯托夫联络的一种技巧，下面不妨用这种技巧计算一下与上述度规(8.18)相应的克里斯托夫联络。

首先，辅助计算的作用量为

$$S = \frac{1}{2} \int d\lambda \left[-A \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + B \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right]. \quad (8.19)$$

对这个作用量进行变分，可得如下运动方程(式中 $\dot{A} \equiv \frac{\partial A}{\partial t}$, $A' \equiv \frac{\partial A}{\partial r}$, B 与此类似)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(A \frac{dt}{d\lambda} \right) - \frac{1}{2} \dot{A} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2} \dot{B} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 &= 0 \\ -\frac{1}{2} A' \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{d}{d\lambda} \left(B \frac{dr}{d\lambda} \right) + \frac{1}{2} B' \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + r \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 &= 0 \\ -\frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} \right) + r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 &= 0 \\ -\frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\lambda} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (8.20)$$

注意到 t, r, θ, ϕ 均是世界线参数 λ 的函数，由此即可将这四个方程化成如下标准形式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \frac{A'}{A} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{A} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{1}{2} \frac{B'}{B} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{\dot{B}}{B} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{1}{2} \frac{A'}{B} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{r}{B} \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{B} \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} &= 0. \end{aligned}$$

从中可以读出所有非零的联络系数，为

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{A}, & \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2} \frac{A'}{A}, & \Gamma_{rr}^t &= \frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{A} \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} \frac{B'}{B}, & \Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{rt}^r = \frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{B}, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} \frac{A'}{B} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{B}, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{r \sin^2 \theta}{B} \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta. \end{aligned} \quad (8.21)$$

下面计算里奇曲率张量，利用里奇张量的定义式

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\rho\mu} + \Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu}. \quad (8.22)$$

利用(8.21)式给出的联络系数，经过一个略微繁琐但却直接的计算，可以得到

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{A''}{2B} + \frac{A'}{rB} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{\ddot{B}}{2B} + \frac{\dot{B}}{4B}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right) \\ R_{rr} &= -\frac{A''}{2A} + \frac{B'}{rB} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{\ddot{B}}{2A} - \frac{\dot{B}}{4A}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right) \\ R_{\theta\theta} &= 1 - \left(\frac{r}{B}\right)' - \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta R_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

以及

$$R_{tr} = R_{rt} = \frac{\dot{B}}{rB}. \quad (8.24)$$

里奇张量的其它分量都是零。另外，由(8.23)式容易得到

$$R_{tt}/A + R_{rr}/B = \frac{1}{rB}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right). \quad (8.25)$$

8.3 施瓦西解

8.3.1 真空爱因斯坦方程

前面提到过，施瓦西解是描述一个球对称星体的外部时空，从而它描述的是没有物质分布的真空部分，这时候相应的爱因斯坦场方程可以简化。为了看清楚这种简化，我们首先把标准形式的爱因斯坦场方程 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}$ 进行指标缩并，进而得到(注意是四维时空) $-R = 8\pi GT$ ，其中 $T = T^{\mu}_{\mu}$ ，由此就可以把四维时空的爱因斯坦方程改写成如下形式

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \quad (8.26)$$

对于没有物质分布的真空部分，有 $T_{\mu\nu} = T = 0$ ，从而即有如下真空的爱因斯坦方程

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (8.27)$$

这绝对不意味着，在真空中时空一定是平坦的，时空如果要平坦，则必须满足更严格的条件 $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ ，而不只是里奇张量等于零。

8.3.2 施瓦西解

下面我们求解球对称时空的真空爱因斯坦方程。首先，根据(8.24)式和真空方程的 $R_{tr} = 0$ ，我们有

$$\dot{B} = 0. \quad (8.28)$$

也即是说，球对称时空度规(8.18)里的函数 B 其实并不依赖于时间 t ，而仅仅是 r 的函数，可以写作 $B(r)$ 。

其次，根据真空方程的 $R_{tt} = R_{rr} = 0$ ，我们有 $R_{tt}/A + R_{rr}/B = 0$ ，进而由(8.25)式可以得到

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0, \quad (8.29)$$

由此可知 $(\ln(AB))' = 0$ ，积分即得

$$AB = f(t), \quad (8.30)$$

式中 $f(t)$ 为 t 的某个待定函数。进一步，将(8.29)式代入(8.23)式的 $R_{\theta\theta}$ 分量，并利用真空方程的 $R_{\theta\theta} = 0$ ，即可以得到

$$R_{\theta\theta} = 1 - \left(\frac{r}{B}\right)' = 0. \quad (8.31)$$

积分，即可得到

$$B(r) = \left(1 + \frac{c}{r}\right)^{-1}, \quad (8.32)$$

式中 c 为积分常数。结合(8.32)式和(8.30)式，即有

$$A(t, r) = f(t) \left(1 + \frac{c}{r}\right). \quad (8.33)$$

上面的求解过程没有用到 $R_{tt} = R_{rr} = 0$ ，而只用到了 $R_{tt}/A + R_{rr}/B = 0$ ，所以我们实际上还要检验比方说 $R_{rr} = 0$ 是否满足？代入(8.32)式和(8.33)式不难发现，的确满足！看起来这是一个巧合，因为方程的数目似乎比变量的数目要多。但这其实不是巧合，而是微分同胚不变性(或

者说广义协变性)的必然结果。由于微分同胚不变性,我们必然有恒等式 $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$,这个恒等式确保了在前面的求解已经完成后必然自动地有 $R_{rr} = 0$ 。

所以球对称的真空解必定具有如下度规

$$ds^2 = -f(t)\left(1 + \frac{c}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{c}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2.$$

将时间变量重新定义为 $\sqrt{f(t)}dt \rightarrow dt$ 即可以吸收掉函数 $f(t)$,进而将球对称真空解写成

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{c}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{c}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (8.34)$$

我们看到,球对称的真空解必定是一个度规不依赖于时间的静态时空,更准确地说是球对称时空的度规必定由上式给出,这个结论也称作**伯克霍夫定理**。注意上述这个解在 $r = 0$ 处是奇异的,好在我们本来关心的也是球对称星体的外面,从而不会取 $r = 0$ 。

伯克霍夫定理的一个推论是,对于一个质量均匀分布的空心球壳,其空腔内部的时空必定是平坦时空。这是因为,首先空腔内部满足真空爱因斯坦方程,其次,系统有球对称性。所以空腔内部的时空度规必定由上面的(8.34)式描述。最后,由于 $r = 0$ 的球心也在空腔内部,所以这时候(8.34)式中的待定常数 c 必定等于零,否则 $r = 0$ 处的时空就奇异了!如此一来,空腔内部的时空度规就必定是平坦度规。或者说,质量均匀分布的球壳空腔内部必定没有引力场!这个结论在牛顿引力理论中当然是人们熟知的。

为了看清楚(8.34)式中常数 c 的物理含义,我们注意到在牛顿近似中 $g_{00} = -(1 + 2\Phi)$,而对于一个球对称的星体,牛顿万有引力势 $\Phi = -\frac{GM}{r}$,其中 M 为星体的总质量。将牛顿近似的这个结论与(8.34)式中的 $g_{00} = -(1 + \frac{c}{r})$ 进行比较,即可知 $c = -2GM$ 。从而解(8.34)可以重写成

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (8.35)$$

这就是著名的**施瓦西解**,它描述一个质量为 M 的球对称星体的外部时空。

虽然我们是一次性同时讲述施瓦西解和伯克霍夫定理,但在历史上伯克霍夫定理当然出现在施瓦西解之后,施瓦西最初解方程的时候额外假设了 A, B 不依赖于时间 t ,是伯克霍夫解除了这一条假设。

伯克霍夫定理告诉我们,即使引力源在收缩、膨胀、甚至沿着径向在振荡,只要它保持球对称性,那它外部的时空度规就必定是不依赖于时间

的(8.34)式。简言之，并没有球对称的引力波(通常所说的球面波并不一定是球对称的，球对称引力波还要求波的极化方向也保持球对称)！在电磁学中，我们也有一个类似的结论，即真空中保持球对称性的电场必定是库伦场，没有球对称的电磁波。这些结论和下面的事实密切相关，即在多极矩展开中，电磁辐射的领头阶是偶极辐射，没有零极辐射，类似的，引力辐射的领头阶是四极辐射，没有零极辐射，甚至也没有偶极辐射。能量动量的零极矩就是质量，偶极矩就是角动量，因此引力波没有零极辐射和伯克霍夫定理密切相关，而没有偶极辐射则和爱因斯坦方程存在具有非零角动量的旋转解(即所谓克尔解)密切相关。并且这些事实也和所谓的黑洞无毛定理(也叫黑洞三毛)相关，所谓的黑洞无毛即是说四维时空中的无论什么黑洞都可以由三个参数(即“三根毛”)唯一确定，这三个参数即是质量、电荷、以及角动量。其它毛正好对应引力辐射的四极或者四极以上的高极矩(或者电磁辐射的偶极以及偶极以上的高极矩)，而这些高极矩是存在引力辐射的，因此在黑洞形成过程中，这些高极的毛都辐射掉了，最后只剩下不会辐射的三根毛。

从上述解中可以看到， $2GM$ 具有长度量纲，可以理解为某种引力半径，称作施瓦西半径，记为 r_g

$$r_g \equiv 2GM. \quad (8.36)$$

利用 r_g ，施瓦西解就可以写成

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (8.37)$$

对于太阳，其施瓦西半径 $r_g \sim 3km$ ，这与太阳半径相比是一个非常微小的量。实际上，对于各种典型的天文学客体，其施瓦西半径 r_g 与物质分布半径(简称半径) R 的比值 r_g/R 大约为， 10^{-9} (地球)、 10^{-6} (太阳)、 10^{-4} (白矮星)，以及 10^{-1} (中子星)，总的来说都是一个小量，这就是后文的一些微扰计算中常常把含 r_g 的项看作微扰小量的原因。

通过重新定义径向变量 $r \rightarrow \rho$,

$$r = \rho\left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^2. \quad (8.38)$$

我们也可以把施瓦西解(8.35)写成如下各向同性的形式

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{r_g}{4\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^2}dt^2 + \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^4(d\rho^2 + \rho^2d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta d\phi^2). \quad (8.39)$$

8.4 粒子在施瓦西时空中的运动

本节我们主要研究粒子(包括有质量的粒子和无质量的光子)在施瓦西时空中的运动。通过这个研究,我们将推导出光线在球对称引力场中的偏折公式,至于它和天文观测的比较则是我们在第三章讲述等效原理的时候就已经讲过了的。我们还将推导出行星绕太阳运动时由于广义相对论效应所带来的近日点进动,尤其是,我们将计算出水星的近日点进动并和天文观测进行比较,在历史上,这双方的吻合也是对广义相对论理论的经典检验之一。

8.4.1 粒子在球对称时空中的运动

有质量粒子

(8.20)式实际上已经得到了粒子在球对称时空中的测地线方程(只需取参数 λ 为有质量粒子的固有时参数或者无质量粒子的仿射参数)。比方对于有质量粒子,这时候 $\lambda = \tau$ 。而对于施瓦西解,注意到最终时空是静态的,即 $\dot{A} = \dot{B} = 0$,所以这组方程简化为

$$\frac{d}{d\tau} \left(A \frac{dt}{d\tau} \right) = 0 \quad (8.40)$$

$$-\frac{1}{2} A' \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{d}{d\tau} \left(B \frac{dr}{d\tau} \right) + \frac{1}{2} B' \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + r \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (8.41)$$

$$-\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) + r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (8.42)$$

$$-\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) = 0. \quad (8.43)$$

另外,对于有质量粒子,其四维速度与自身的内积等于 -1 ,从而必有

$$A(r) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - B(r) \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 1. \quad (8.44)$$

方程(8.40)和方程(8.43)的解为

$$A \frac{dt}{d\tau} = \epsilon, \quad r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} = l. \quad (8.45)$$

式中 ϵ 和 l 均为常数。记粒子的四维速度矢量为 $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$,由于 $A \frac{dt}{d\tau} = -g_{00} u^0 = -u_0$,所以 $-u_0 = \epsilon$ 为守恒量所反映的,正是粒子的能量守恒,具体来说守恒量 ϵ 是每单位质量的能量。而 $r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} = g_{\phi\phi} u^\phi = u_\phi$,因此 $u_\phi = l$ 所反映

的,正是粒子环绕竖直轴的角动量守恒, l 就是每单位质量的角动量,之所以有角动量守恒,当然是因为系统有球对称性。

另外,方程(8.42)的解可以取为 $\theta(\tau) = \frac{\pi}{2}$,即粒子实际上是在黄道面上运动。将这些结果代入方程(8.44),可以得到

$$\frac{\epsilon^2}{A} - B(r)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{l^2}{r^2} = 1. \quad (8.46)$$

取 $\theta(\tau) = \frac{\pi}{2}$,并将这个方程对径向坐标 r 求导,即可以自动满足方程(8.41)。因此,(8.41)式无需再独立求解,而我们最终需要进一步处理的方程仅仅只有方程(8.46)。不难发现这个方程可以重写成如下形式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = 0, \quad (8.47)$$

式中

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2B}\left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) - \frac{\epsilon^2}{2AB}. \quad (8.48)$$

在数学形式上,我们可以将(8.47)理解为,一个总能量为零的非相对论性的牛顿质点在一个 $V_{\text{eff}}(r)$ 的一维势场中运动,其中 τ 可以理解为时间。

很多时候,我们仅仅关心粒子在黄道平面上的运动轨道,这时候我们可以利用 $\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{l}{r^2}$,以及利用 $\frac{dr}{d\tau}/\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi}$ 消去固有时参数 τ ,进而将(8.47)式比上 $(\frac{d\phi}{d\tau})^2$,即可以得到粒子的轨道方程

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{B}\left(\frac{r^4}{l^2} + r^2\right) - \frac{\epsilon^2}{l^2} \frac{r^4}{AB} = 0. \quad (8.49)$$

给定 $A(r)$ 和 $B(r)$,原则上我们只要将这个式子积分,就能求出轨道方程 $r(\phi)$ 。

实际上,人们常常应用如下技巧,即引入变量代换 $u = 1/r$,从而 $\frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi}$,代入上面的轨道方程,即有

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{B}\left(\frac{1}{l^2} + u^2\right) - \frac{\epsilon^2}{l^2} \frac{1}{AB} = 0. \quad (8.50)$$

当然,有时候人们关心粒子运动的坐标时 t 与 r 之间的关系 $t(r)$,那这时候就可以利用 $A\frac{dt}{d\tau} = \epsilon$,以及 $\frac{dr}{d\tau}/\frac{dt}{d\tau} = \frac{dr}{dt}$ 来消去固有时参数 τ ,并得到 $t(r)$ 所满足的微分方程。

光子

如果我们考察的不是一个有质量粒子，而是一个无质量的光子。这时候测地线方程当然是一样的，只需将固有时参数 τ 替换为仿射参数 λ 。唯一不同的是，方程(8.44)应该替换成如下类光四矢量条件

$$A(r)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - B(r)\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 - r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0. \quad (8.51)$$

这时候当然也有能量守恒和角动量守恒，取光子在黄道平面 $\theta = \pi/2$ 内运动，相应的能量守恒和角动量守恒即为 $A\frac{dt}{d\lambda} = \epsilon$ ， $r^2\frac{d\phi}{d\lambda} = l$ 。相应的，方程(8.46)就应该替换成

$$\frac{\epsilon^2}{A} - B(r)\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{l^2}{r^2} = 0. \quad (8.52)$$

这个方程可以重写为

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{B}\left(\frac{l^2}{r^2}\right) - \frac{\epsilon^2}{AB} = 0. \quad (8.53)$$

它可以类似地看作为一个牛顿粒子在一个一维势场中的运动。

当然，更多时候，我们更关心的，其实是光子在黄道平面上的轨道方程，为此我们只需利用 $\frac{dr}{d\lambda}/\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{dr}{d\phi}$ 消去仿射参数 λ ，即可以得到

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{r^2}{B} - \left(\frac{\epsilon}{l}\right)^2\frac{r^4}{AB} = 0. \quad (8.54)$$

很显然，光子的轨道仅仅依赖于两个守恒量的比值 ϵ/l 。为了看清楚这个比值的几何含义，我们取 $r \rightarrow \infty$ ，这时候时空几何将趋于平坦的闵可夫斯基几何，即 $A \rightarrow 1$ ， $B \rightarrow 1$ ，从而上述轨道方程趋于

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \simeq \left(\frac{\epsilon}{l}\right)^2 r^4, \quad (8.55)$$

积分，即可得 $1 \simeq \frac{\epsilon}{l}r\phi \Leftrightarrow r\phi \simeq l/\epsilon$ 。如图(8.1)所示，这意味着 $b = l/\epsilon$ 为无穷远处入射的光子被引力场散射时的瞄准参数。

引入新变量 $u = 1/r$ ，从而 $\frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi}$ ，代入上面的轨道方程(8.54)，即有

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{B}u^2 - \frac{1}{b^2}\frac{1}{AB} = 0. \quad (8.56)$$

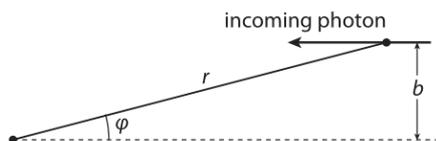


图 8.1: 从无穷远处入射的光子具有瞄准参数 $r\phi \simeq b = l/\epsilon$.

与有质量粒子的轨道方程(8.50)相比, 光子的轨道方程仅仅依赖于瞄准参数 b , 也就是仅仅依赖于 l 与 ϵ 的比值, 而不依赖于 l 或 ϵ 本身。这是因为, 对于光而言, 其仿射参数 λ 的选取并不唯一, 而是可以相差一个重标度, 在仿射参数的重标度之下 $A \frac{dt}{d\lambda} = \epsilon$ 当然也要重标度, 类似的 l 也要重标度, 因此对于光, 其 ϵ 和 l 本身都不是物理的, 但是, 这两者的比值是物理的, 不依赖于仿射参数的选取。

8.4.2 光线偏折再回顾

前面在讨论等效原理的相关章节中, 我们已经说过, 等效原理的一个预言是, 光线在引力场中会被散射, 从而发生偏折。我们也说过, 如果把光看成一个有质量的小颗粒, 那么即使根据牛顿的引力理论, 也能计算出光线在引力场中的一个偏折量。问题是, 广义相对论计算出来的光线偏折量是牛顿理论的2倍。下面我们就来推导, 这个2倍到底是怎么来的。

为此, 我们在轨道方程(8.56)中代入具体的施瓦西解, 即 $AB = 1$ 以及 $B^{-1} = 1 - \frac{2GM}{r} = 1 - r_g u$, 从而即有光线在施瓦西解中的轨道方程

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - r_g u^3 = \frac{1}{b^2}. \quad (8.57)$$

它在 $r \rightarrow \infty$, 从而 $u \rightarrow 0$ 处的渐近解就是我们已经知道的 $u \simeq \frac{1}{b}\phi$ 。

下面我们来近似求解轨道方程(8.57), 为此, 我们将这个方程再求导一次, 即有

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3}{2}r_g u^2. \quad (8.58)$$

将球形星体的存在看作一个微扰, 即将右边的 $\frac{3}{2}r_g u^2$ 看作微扰项。首先, 我们忽略这一项, 从而相应的方程即是标准的谐振子方程 $\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0$, 这个方程的标准解即是 $u = \frac{1}{b} \sin \phi$ (系数由 $u \rightarrow 0$ 的渐近解确定), 或者说 $b = r \sin \phi$,

很显然这描述的是直线前进的光线。为了反映微扰项的影响，我们设完整的解为 $u = \frac{1}{b} \sin \phi + u_1$ ，其中 u_1 为微扰带来的修正。代入方程(8.58)并保留一阶微扰近似，即有

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 \simeq \frac{3}{2}(r_g/b^2) \sin^2 \phi. \quad (8.59)$$

这个方程的解为

$$u_1 \simeq \frac{r_g}{b^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \phi\right) \Leftrightarrow u \simeq \frac{1}{b} \sin \phi + \frac{r_g}{b^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \phi\right). \quad (8.60)$$

如图(8.2)所示，为了求出光线在引力场中的偏折量 $\Delta\phi$ ，我们取 $r \rightarrow \infty$ ，即 $u \rightarrow 0$ ，从而有

$$\frac{1}{b} \sin \phi(r = \infty) + \frac{r_g}{b^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \phi(r = \infty)\right) \simeq 0. \quad (8.61)$$

这个方程有两个根，其中一个是非物理的，另一个近似是 $\sin \phi(r = \infty) \simeq$

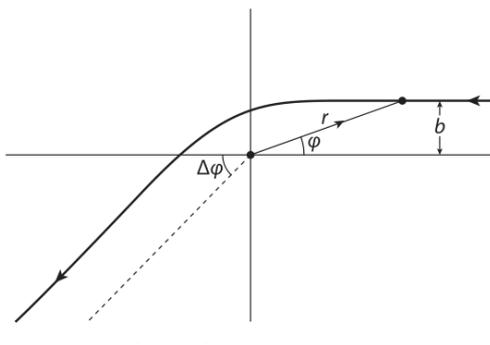


图 8.2: 光线偏折.

$-r_g/b$ ，注意这是一个小量，所以这个解告诉我们：当光线从无穷远处入射进来的时候， $\phi(r = \infty) \simeq -r_g/b$ ，而当光线出射到无穷远处去的时候 $\phi(r = \infty) \simeq \pi + r_g/b$ ，所以，光线的偏折角 $\Delta\phi$ 为

$$\Delta\phi \simeq 2r_g/b = 4GM/b. \quad (8.62)$$

这就是广义相对论给出的光线偏折公式，这个结果恰恰是牛顿结果的2倍。对于太阳，当我们代入太阳质量，并取 b 为太阳半径，即可以得到星光从太阳边缘掠过时的偏折量，大约为 $1.75''$ 。

8.4.3 水星近日点进动

类似的分析也可以应用于有质量粒子，当然，一个重要的区别是，光线并没有束缚轨道，因此只需分析散射问题，但是，有质量粒子是有束缚轨道的，就好比行星绕太阳的运动，实际上我们通常对这些束缚轨道更感兴趣。

为了分析有质量粒子围绕球对称星体的轨道运动，我们在轨道方程(8.50)中代入具体的施瓦西解，即 $AB = 1$ 以及 $B^{-1} = 1 - \frac{2GM}{r} = 1 - r_g u$ ，从而即可得到

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{1}{l^2} + u^2\right)(1 - r_g u) = \frac{\epsilon^2}{l^2}. \quad (8.63)$$

重新整理一下，或者也可以写成

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - \frac{r_g}{l^2}u - r_g u^3 = \frac{\epsilon^2 - 1}{l^2}. \quad (8.64)$$

为了简单起见，引入记号 $r_g/l^2 \equiv 2\sigma$ (即 $GM/l^2 \equiv \sigma$)， $\epsilon^2 - 1 \equiv 2E$ ，则上式即是

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - 2\sigma u - r_g u^3 = 2E/l^2. \quad (8.65)$$

现在，让我们回顾一下标准的牛顿力学中的粒子在万有引力场中的运动，这时候，我们有能量守恒方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = E. \quad (8.66)$$

式中 E 为单位质量的非相对论性粒子的总能量， l 和上面一样是每单位质量的角动量。当然，我们还有角动量守恒方程 $\frac{d\phi}{dt} = \frac{l}{r^2}$ 。完全类似于前面的操作可以消去时间变量 t ，并进行变量代换 $u = 1/r$ ，最后我们可以得到

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - 2\sigma u = 2E/l^2. \quad (8.67)$$

这就是广义相对论的(8.65)式在牛顿力学中的对应物。从这个对应可以清楚地看到，广义相对论中定义的 $E = (\epsilon^2 - 1)/2$ 就是单位质量粒子非相对论性总能量在相对论中的推广，特别的，这个能量是扣除了自由粒子静止能量的。

为了求解方程(8.67)，我们将它再次对 ϕ 求导，即可得

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \sigma. \quad (8.68)$$

这是一个谐振子方程，其通解可以写成

$$u_0 = \sigma(1 + e \cos(\phi - \phi_0)), \quad (8.69)$$

式中 e 和 ϕ_0 为两个积分常数。为方便起见，人们常常选 $\phi_0 = 0$ 。所以，(8.67)式的解必定具有如下形式

$$u_0 = \sigma(1 + e \cos \phi), \quad (8.70)$$

反代入(8.67)式，可得 e 满足

$$\sigma^2(e^2 - 1) = 2E/l^2. \quad (8.71)$$

(8.70)式所描写的就是极坐标下的一个标准的二次曲线， e 就是它的离心率，对于椭圆轨道(束缚轨道)， $e < 1$ ，从(8.71)式可以看出，这相当于要求 $E < 0$ 。所以在牛顿力学中， $E < 0$ 对应束缚轨道， $E \geq 0$ 对应的即是散射轨道。

给定单位质量粒子的角动量 l 和能量 E ，我们就能确定轨道参数 σ 和 e 。但是，在天文学上，椭圆轨道的 e 不难观测，反而是 E 和 l 难以直接确定，为了用天文学上更容易观测的量来表达椭圆方程中的参数 σ ，我们注意到，在近日点， r 最小， u_0 最大，从而对应 $\phi = 0$ 。对于束缚的椭圆轨道，假设半长轴为 a (这是天文学上容易观测的量)，则近日点的距离为 $a(1 - e)$ ，从而由(8.70)式，可得

$$\frac{1}{a(1 - e)} = \sigma(1 + e) \Rightarrow \sigma = \frac{1}{a(1 - e^2)}. \quad (8.72)$$

下面，回到完整的广义相对论轨道方程(8.65)，与牛顿力学的方程(8.67)相比，我们发现左边多了一个 $-r_g u^3$ 项，完全类似于光线偏折情形的讨论，我们把这一项看作对牛顿引力的一个微扰，从而即可以用微扰论的方法来求解(8.65)。具体来说，我们设 $u = u_0 + u_1$ ，其中 $u_0 = \sigma(1 + e \cos \phi)$ 即为上面的牛顿解，而 u_1 是微扰修正，将这个假设代入轨道方程(8.65)，展开到微扰的一阶项，即可得

$$-\sin(\phi) \frac{du_1}{d\phi} + \cos(\phi) u_1 = \frac{r_g \sigma^2}{2e} (1 + e \cos \phi)^3. \quad (8.73)$$

上述方程左边关于 u_1 是线性的，而右边的驱动项则是 $1, \cos \phi, \cos^2 \phi, \cos^3 \phi$ 这四者的一个线性组合，注意没有 $\sin \phi$ 项。为了比较左右两边，不失一般性地，我们可以设

$$u_1 = \alpha + \beta \cdot \cos \phi + \gamma \cdot \cos^2 \phi + \delta \cdot \phi \sin \phi, \quad (8.74)$$

特别的， u_1 中不可能包含 $\phi \cos \phi$ 这样的项，因为这样的项对方程(8.73)左边的贡献和右边的驱动项根本无法匹配起来。将上面的假设代入方程(8.73)并比较左右两边 $1, \cos \phi, \cos^2 \phi, \cos^3 \phi$ 这四项的组合系数，就可以定出 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ，它们当然都是 r_g 的一阶小量，特别的， $\delta = r_g \frac{3}{2} e \sigma^2$ 。从而，在各组合项领头阶近似上，我们可以把完整的解 $u = u_0 + u_1$ 近似成

$$\begin{aligned} u &\simeq \sigma \left(1 + e \cos \phi + r_g \frac{3}{2} e \sigma \phi \sin \phi \right) \\ &\simeq \sigma \left\{ 1 + e \cos \left[\left(1 - \frac{3}{2} r_g \sigma \right) \phi \right] \right\} \end{aligned} \quad (8.75)$$

从最后的结论我们可以看到，每次粒子的径向坐标(比方说近日点坐标)达到其在 $\phi = 0$ 时的同样值，它的角度 ϕ 都得转过 $2\pi / (1 - \frac{3}{2} r_g \sigma) \simeq 2\pi + 3\pi \sigma r_g$ (注意 r_g 是小量)，也即是说，这个角度相对于 2π 角往前进了

$$\Delta \phi \simeq 3\pi \sigma r_g = 6\pi \left(\frac{GM}{l} \right)^2. \quad (8.76)$$

这就是束缚粒子轨道的近日点在引力场中每个周期进动的角度，如图(8.3)所示。

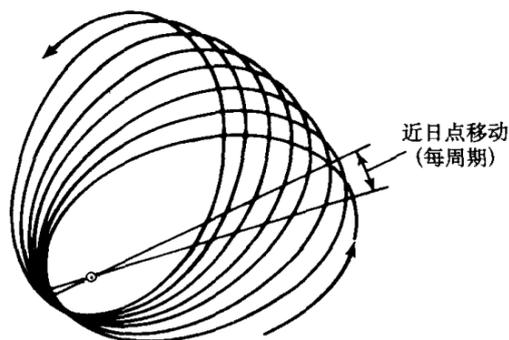


图 8.3: 近日点进动.

由于是束缚轨道，利用(8.72)式，我们也可以将上述结果表示成

$$\Delta\phi \simeq 3\pi\sigma r_g = 6\pi \frac{GM}{a(1-e^2)} = 6\pi \frac{GM}{a(1-e^2)c^2}. \quad (8.77)$$

在上式最后一个等号中，我们通过量纲分析恢复了光速 c 。对于水星绕太阳运动，这个大小大约是每周期 $0.1035''$ ，或者每世纪 $42.98''$ (42.98 弧秒)。这个值远比实际上观测到的水星近日点的总近动值(大约是每世纪 $570''$)要小。这是因为，对水星近日点进动作用最大的不是广义相对论效应，而是其它行星对水星的影响，特别是金星、木星和地球的影响，它们三个加起来的贡献约占总观测量的百分之九十一。但是，在历史上，人们发现水星近日点进动的观测量在扣除了其它行星的影响之后，依然有大约每世纪 $43''$ 的值无法用其它已知理论解释，而这个值正好可以成功地用广义相对论效应来解释。正因为如此，我们才常说，水星近日点进动是广义相对论的一个经典检验。