

目录

第七章 曲率的意义	2
7.1 测地线偏离方程与牛顿近似	2
7.1.1 测地线偏离方程	2
7.1.2 测地线偏离方程与潮汐力	8
7.1.3 爱因斯坦场方程的牛顿近似	9
7.2 *粒子固有时的一阶和二阶变分公式	12

第七章 曲率的意义

陈童

前面我们引入了黎曼曲率张量，它是两维曲面高斯曲率的高维推广，是一个内禀量，相应的黎曼几何也是一种内禀几何。所谓内禀几何，意思就是黎曼几何所描述的高维时空流形不需要嵌入到一个更高维的欧氏空间中，而是仅仅只需要一个在时空本身定义的度规张量就可以描述。但这种内禀的描述就使得时空弯曲变成了一个很抽象很不好理解的东西，进而使得黎曼曲率张量作为一个描述时空曲率的量显得非常抽象。从内禀几何的角度，曲率的几何含义是什么呢？在第一章中，我们给出过一个回答，在黎曼正则坐标系中，曲率张量就是对局部平坦的二阶偏离。本章我们将进一步用内禀的方式讨论黎曼曲率张量的几何含义。

另一方面，第三章中提到过，对潮汐力的相对论性刻画就是黎曼曲率张量。本章我们将进一步搞清楚这个潮汐力与黎曼曲率张量之间的关系，并进而弄清楚黎曼曲率张量在广义相对论中的物理含义。特别的，我们将清楚地看到爱因斯坦场方程如何在牛顿近似中回到牛顿引力理论。

而且，上一章我们引入了坐标无关的数学语言。本章我们将看到，有些问题的处理、有些公式的推导，用这种坐标无关的数学语言来进行将会简洁得多。

7.1 测地线偏离方程与牛顿近似

7.1.1 测地线偏离方程

为了看清楚黎曼曲率张量如何刻画时空弯曲，我们首先注意到，弯曲

时空中的测地线就是平直时空中直线概念的推广，原因有二：第一，在平直的闵可夫斯基时空，自由粒子走的是直线，而在弯曲时空中，自由粒子走的是测地线；第二，在第二章关于光锥与世界线的讨论中，我们看到，闵可夫斯基时空中走直线的粒子，具有最大的固有时，也即是说，直线对应固有时的极值，而根据第三章中对类时测地线的定义，弯曲时空中的类时测地线正是对应固有时的极大值。因此，测地线就是弯曲时空中的“直线”。

这就告诉我们一种刻画时空弯曲的方法：在时空中任意取初始时相互平行的两根类时测地线，如果它们始终保持平行，那就说明时空是平直的。相反，如果随着粒子往前飞行，这两根测地线之间的相对距离在变化(比方说两者离得越来越近)，那就说明时空本身是弯曲的。

上述想法可以转化成精确的数学公式。为此我们考虑依赖于参数 σ 的一簇测地线 $x^\mu(\tau, \sigma)$ (不同的 σ 对应不同的测地线)， τ 为这些测地线的固有时参数(或者对于类光的零性测地线簇， τ 就是仿射参数)。记 $u^\mu(\tau, \sigma)$ 为这些测地线的切向量，即

$$u^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial}{\partial \tau} x^\mu(\tau, \sigma), \quad (7.1)$$

用坐标无关的写法则是

$$u(\tau, \sigma) = u^\mu(\tau, \sigma) \partial_\mu = \partial_\tau. \quad (7.2)$$

满足测地线方程

$$D_u u = 0. \quad (7.3)$$

如图(7.1)所示，记两根无限靠近的测地线之间的相对偏离为 $\delta\sigma\xi^\mu(\tau, \sigma)$,

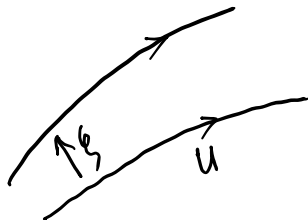


图 7.1: 测地线单参簇与偏离矢量 ξ .

式中 $\delta\sigma$ 为无穷小量, 向量 $\xi^\mu(\tau, \sigma)$ 称作偏离向量, 它由下式给出

$$\xi^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial}{\partial\sigma} x^\mu(\tau, \sigma), \quad (7.4)$$

写成坐标无关的形式即是

$$\xi(\tau, \sigma) = \xi^\mu(\tau, \sigma)\partial_\mu = \partial_\sigma, \quad (7.5)$$

式中 $\partial_\sigma = \frac{\partial}{\partial\sigma}$ 。由于 τ 和 σ 为两个相互独立的参数, 因此 $\partial_\tau\partial_\sigma = \partial_\sigma\partial_\tau$, 从而

$$[u, \xi] = 0. \quad (7.6)$$

利用克里斯托夫联络的无挠条件 $D_u\xi - D_\xi u = [u, \xi]$, 即有

$$D_u\xi = D_\xi u. \quad (7.7)$$

利用上面的(7.3)式和(7.7)式, 再利用 $R(u, \xi) = D_u D_\xi - D_\xi D_u - D_{[u, \xi]} = D_u D_\xi - D_\xi D_u$, 即可以进行如下推导

$$\begin{aligned} \frac{D^2\xi}{D\tau^2} &\equiv D_u D_u \xi = D_u D_\xi u \\ &= D_\xi D_u u + R(u, \xi)u = R(u, \xi)u. \end{aligned} \quad (7.8)$$

即有测地线偏离方程

$$\frac{D^2\xi}{D\tau^2} = R(u, \xi)u. \quad (7.9)$$

或者也可以根据上一章的知识, 将之写成局部坐标中的形式,

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = R^\mu{}_{\alpha\beta\nu} u^\alpha u^\beta \xi^\nu. \quad (7.10)$$

实际上, 对于类时测地线簇, 我们可以进一步要求偏离矢量与测地线的切向量 u 正交。为了看清楚这一点, 我们注意到 τ 为测地线的固有时, 因此切向量 u 其实就是四速度, 从而满足

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1 \Rightarrow \langle u, u \rangle = -1. \quad (7.11)$$

从而我们可以重新定义一个偏离矢量 η

$$\eta = \xi + \langle \xi, u \rangle u. \quad (7.12)$$

很明显 η 与 u 正交, 即满足

$$\langle \eta, u \rangle = 0. \quad (7.13)$$

另外, 利用(7.6)式, 也有

$$\begin{aligned} [u, \eta] &= [u, \xi + \langle \xi, u \rangle u] \\ &= [u, \langle \xi, u \rangle u] = u(\langle \xi, u \rangle)u, \end{aligned} \quad (7.14)$$

再利用 $u(\langle \xi, u \rangle) = D_u(\langle \xi, u \rangle) = \langle D_u \xi, u \rangle = \langle D_\xi u, u \rangle = \frac{1}{2} \xi(\langle u, u \rangle) = \frac{1}{2} \xi(-1) = 0$ (这里我们已经用到了(7.3)式和(7.7)式), 即有

$$[u, \eta] = 0. \quad (7.15)$$

问题是, 这样重新定义的 η 有权作为偏离矢量吗? 即 η 满足测地线偏离方程吗? 回答是肯定的, 因为测地线偏离方程的成立只需要 $D_u u = 0$ 和 $[u, \eta] = 0$ 成立。当然我们也可以直接验证 η 满足测地线偏离方程, 为此只需注意到

$$\begin{aligned} D_u D_u \eta &= D_u D_u \xi + D_u D_u (\langle \xi, u \rangle u) \\ &= D_u D_u \xi + D_u (\langle D_u \xi, u \rangle u) \\ &= D_u D_u \xi + \langle D_u D_u \xi, u \rangle u \\ &= R(u, \xi)u + \langle R(u, \xi)u, u \rangle u \\ &= R(u, \xi)u + R(u, u, u, \xi)u. \end{aligned} \quad (7.16)$$

式中我们已经代入了 ξ 所满足的测地线偏离方程(7.9)。又注意到曲率算子 $R(X, Y)$ 关于 X, Y 为线性依赖, 而且满足 $R(X, Y) = -R(Y, X)$, 从而 $R(u, u) = 0$, 从而

$$R(u, \eta) = R(u, \xi). \quad (7.17)$$

另外, 根据 $R(X, Y, Z, W)$ 关于 X, Y 反对称的性质, 可知 $R(u, u, u, \xi) = 0$. 将这些代入(7.16)式, 即有

$$\frac{D^2 \eta}{D\tau^2} \equiv D_u D_u \eta = R(u, \eta)u. \quad (7.18)$$

从而, 重新定义的与 u 正交的偏离矢量 η 同样满足测地线偏离方程。

注意到测地线偏离方程是关于偏离矢量的一个线性微分方程，所以不妨引入一个线性微分算子 \hat{J}_u ，其在偏离矢量 η 上的作用如下

$$\hat{J}_u \eta \equiv -\frac{D^2 \eta}{D\tau^2} + R(u, \eta)u. \quad (7.19)$$

如此一来测地线偏离方程就可以简写为

$$\hat{J}_u \eta = 0. \quad (7.20)$$

测地线偏离方程清楚地告诉我们，黎曼曲率张量决定了两根邻近测地线之间相对距离的变化情况，因此黎曼曲率张量是对时空弯曲情况的一种刻画。

将测地线偏离方程限制在一条基准测地线 γ 上所得的结果也称作**雅可比方程**，相应的偏离矢量 ξ (或者 η)也称作沿 γ 定义的雅可比场。如果基准测地线 γ 是一簇临近测地线中的一条，那我们当然有测地线偏离方程。反过来的情况却不一定成立，即是说，沿着 γ 有一个雅可比场并不意味着 γ 经过变分 $\delta x^\mu = \delta \sigma \eta^\mu$ 以后得到的临近世界线一定是测地线，因为雅可比方程只是关于偏离矢量 η 的线性方程，因此，它只意味着 γ 变分以后的临近曲线在一阶近似上满足测地线方程。

如果基准测地线 γ 上存在两点 p, q ，使得雅可比场在这两点的值为零(但在这两点之间不为零)，即满足 $\eta(p) = \eta(q) = 0$ ，则称这两点为 γ 的一对**共轭点**，如图(7.2)所示。根据雅可比场的定义可以知道，如果测地线 γ 上存

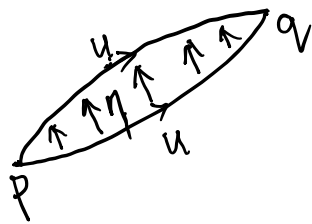


图 7.2: p, q 为一对共轭点.

在一对共轭点 p, q ，则有时候(但不是必然)意味着存在一簇从共同的 p 点发出，又汇聚于 q 点的测地线单参簇，使得 γ 是这一簇测地线中的一条。比方说，二维球面上的测地线就是大圆，因此地球仪上所有经线圈都是测地线，它们构成了测地线簇，而南极和北极就是这测地线上的一对共轭点。共轭点 p, q 的存在必然意味着的是，原测地线 γ 可以沿着雅可比场 η 作一个小的变

动 $\delta x^\mu = \delta \sigma \eta^\mu$ ，变动以后的曲线依然连接 p, q 两点，并且在一阶近似上依然满足测地线方程。

前面我们说过，类时测地线对应固有时的极大值，其实这个说法只在固有时较小时才成立，如果两点的时空距离足够远，从而使得固有时足够大，那这个说法一般来说是值得商榷的。后面我们将会看到，共轭点的存在对于决定类时测地线 γ 是否为两点之间固有时取极大值的曲线有重要意义。

为了进一步考察沿着测地线 γ 的雅可比方程，下面取定一个沿着 γ 自由下落的局部惯性系，则根据局部惯性系的定义，沿着 γ 有

$$g_{\mu\nu}|_\gamma = \eta_{\mu\nu}, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\rho|_\gamma = 0. \quad (7.21)$$

由于沿着整个 γ 均有 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho|_\gamma = 0$ ，所以当然也有 $\partial_\tau \Gamma_{\mu\nu}^\rho|_\gamma = 0$ ，从而即有

$$\frac{D^2 \eta^\mu}{D\tau^2} = \frac{d^2 \eta^\mu}{d\tau^2}. \quad (7.22)$$

因此在这样的坐标系中，雅可比方程可以重写为

$$\widehat{J}_u \eta^\mu = -\frac{d^2 \eta^\mu}{d\tau^2} + R^\mu{}_{\alpha\beta\nu} u^\alpha u^\beta \eta^\nu = 0. \quad (7.23)$$

在这个沿着 γ 自由下落的局部惯性系中，粒子的四维速度 u^μ 满足

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (7.24)$$

即 $u^0 = 1$, $u^i = 0, i = 1, 2, 3$ ，因此与之正交的偏离矢量 η^μ 必定满足

$$\eta^0 = 0, \quad (7.25)$$

从而雅可比方程的0分量变成

$$\begin{aligned} \widehat{J}_u \eta^0 &= -\frac{d^2 \eta^0}{d\tau^2} + R^0{}_{\alpha\beta\nu} u^\alpha u^\beta \eta^\nu = 0 \\ \Rightarrow \widehat{J}_u \eta^0 &= 0 + R^0{}_{00\nu} u^0 u^0 \eta^\nu = 0 \\ \Rightarrow \widehat{J}_u \eta^0 &= -R_{000\nu} \eta^\nu = 0, \end{aligned} \quad (7.26)$$

由于 $R_{000\nu} = 0$ ，所以最后是一个自动成立的平凡结果。类似的，可以得到雅可比方程的非平凡空间分量($i, j = 1, 2, 3$)，有

$$\begin{aligned} \widehat{J}_u \eta^i &= -\frac{d^2 \eta^i}{d\tau^2} + R^i{}_{\alpha\beta\nu} u^\alpha u^\beta \eta^\nu = 0 \\ \Rightarrow \widehat{J}_u \eta^i &= -\frac{d^2 \eta^i}{d\tau^2} + R_{i00j} \eta^j = 0. \end{aligned} \quad (7.27)$$

即是说, 在沿着测地线 γ 自由下落的局部惯性系中, 决定雅可比方程的线性微分算子 \hat{J}_u 可以简单理解为如下 3×3 矩阵值的微分算子

$$\hat{J}_u = -\delta_{ij} \frac{d^2}{d\tau^2} + V_{ij}, \quad \text{式中 } V_{ij} = R_{i00j} = -R_{0i0j}. \quad (7.28)$$

由于 $R_{0i0j} = R_{0j0i}$, 所以 $V_{ij} = V_{ji}$, 从而 \hat{J}_u 作为 3×3 矩阵是一个实对称矩阵。进而类比于量子力学里的哈密顿算符可以知道, 作为作用在“波函数” $\eta^j(\tau)$ 上的算符, 算符 \hat{J}_u 是一个厄密算符!

7.1.2 测地线偏离方程与潮汐力

引力场中自由下落的粒子所走的就是类时测地线, 因此偏离矢量 η 就可以理解为两个邻近的自由下落粒子之间的相对位置矢量, 从而 $D^2\eta/D\tau^2$ 就是这两个粒子的四维相对加速度, 不妨记为 a^μ , 从而根据测地线偏离方程

$$a^\mu = \frac{D^2\eta^\mu}{D\tau^2} = R^\mu{}_{\alpha\beta\nu} u^\alpha u^\beta \eta^\nu. \quad (7.29)$$

另一方面, 假设以两个粒子中的一个为坐标原点, 取定一个沿着粒子所走的测地线自由下落的局部惯性系, 那么根据第三章的知识, 另一个邻近粒子在这个局部惯性系中感受到的力就是潮汐力, 从而相对加速度 a^μ 其实就是协变的潮汐加速度。根据上面式子可知, 黎曼曲率张量完全决定了这个协变的潮汐加速度, 换言之, 潮汐加速度正是黎曼曲率张量的物理反映。

下面, 取这无限邻近的两个粒子之一所走的测地线为 γ , 并取定一个沿着 γ 自由下落的局部惯性系, 则根据上一小节的分析可知, 协变潮汐加速度可以写成

$$a^\mu = \frac{D^2\eta^\mu}{D\tau^2} = \frac{d^2\eta^\mu}{d\tau^2}. \quad (7.30)$$

又由于在此坐标系中 $\eta^0 = 0$, 从而潮汐加速度也满足 $a^0 = 0$ 。进一步, 对于潮汐加速度的空间分量 $i, j = 1, 2, 3$, 有

$$a^i = R^i{}_{00j} \eta^j. \quad (7.31)$$

下面, 假设引力场不强, 并且粒子的运动速度远小于光速, 那这时候第三章中对潮汐力的牛顿力学分析就近似成立了。在牛顿近似中, 粒子固有时约等于坐标时, 即 $\tau \approx x^0 = t$, 从而上面的潮汐加速度 a^i 就是普通牛顿力学中的潮汐加速度(相对加速度)。

另一方面, 根据牛顿力学, 自由落体的加速度为

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial_i \Phi(\mathbf{x}). \quad (7.32)$$

式中 $\Phi(\mathbf{x})$ 为牛顿万有引力势。将上式对 x^i 变分, 并取 $\delta x^i = \eta^i$ 为偏离矢量, 即可以得到两个邻近的自由下落粒子之间的相对加速度(即潮汐加速度)

$$\begin{aligned} a^i &= \frac{d^2 \eta^i}{dt^2} = \frac{d^2 \delta x^i}{dt^2} = -(\partial_i \partial_j \Phi) \delta x^j \\ &= -(\partial_i \partial_j \Phi) \eta^j. \end{aligned} \quad (7.33)$$

将这个结果与(7.31)式进行比较, 即有, 在牛顿近似下

$$R^i{}_{00j} \approx -(\partial_i \partial_j \Phi). \quad (7.34)$$

或者也可以写成

$$R^i{}_{0j0} \approx (\partial_i \partial_j \Phi). \quad (7.35)$$

在第三章中我们讲过 $\partial_i \partial_j \Phi$ 完全刻画了牛顿力学中的潮汐力, (7.35)式告诉我们, 黎曼曲率张量正是对这一刻画的相对论协变推广。

(7.35)式还能告诉我们一个重要结论, 即里奇张量的00分量在牛顿近似下为

$$R_{00} \approx \nabla^2 \Phi. \quad (7.36)$$

为了看清楚这一点, 我们只需注意到, 根据黎曼曲率张量指标的对称性, 有 $R^\mu{}_{000} = 0$, 从而

$$R_{00} = R^\mu{}_{0\mu 0} = R^0{}_{000} + R^i{}_{0i0} = R^i{}_{0i0} \approx \nabla^2 \Phi, \quad (7.37)$$

上式的最后一个等于号我们代入了(7.35)式。

7.1.3 爱因斯坦场方程的牛顿近似

有了上一小节的准备, 我们就可以来讨论爱因斯坦场方程的牛顿近似了, 我们将清楚地看到爱因斯坦场方程如何在牛顿近似中回到牛顿引力理论。

为了对爱因斯坦场方程进行牛顿近似, 我们首先需要对方程右边的物质能动量张量进行非相对论近似。为此, 我们先回想一下第四章中导出的多质点体系的能动量张量, 为

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_n m_n \int d\tau_n \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \delta^4(x - x_n(\tau_n)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_n m_n \int d\sigma_n \frac{dx_n^\mu}{d\sigma_n} \frac{dx_n^\nu}{d\sigma_n} \delta^4(x - x_n(\sigma_n)). \end{aligned} \quad (7.38)$$

式中我们已经利用变量代换将粒子世界线参数换成了任意的 σ_n 。仿照第二章中的相关做法, 根据 σ_n 的任意性, 取 $\sigma_n = x_n^0$, 并做完对 σ_n 的积分以后, 就可以得到

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sum_n \frac{p_n^\mu p_n^\nu}{p_n^0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \right]. \quad (7.39)$$

式中 $p_n^\mu = m_n \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}$ 为粒子的四维动量, 并且根据四维速度满足的 $g_{\mu\nu} \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} = -1$, 有

$$-g_{\mu\nu} p_n^\mu p_n^\nu = m_n^2. \quad (7.40)$$

以单个粒子为例, 回想一下第三章中曾简略地提及如何对广义相对论进行牛顿近似, 为此只需假定粒子的速度为一阶小量, 满足

$$\mathbf{v} \ll 1, \quad (7.41)$$

并取度规张量为($i, j = 1, 2, 3$ 为空间指标)

$$g_{00}(x) = -(1 + 2\Phi(\mathbf{x})), \quad g_{0i}(x) = 0, \quad g_{ij}(x) = \delta_{ij}. \quad (7.42)$$

其中小量

$$\Phi(x) \ll 1. \quad (7.43)$$

在零阶近似上, $g_{\mu\nu}$ 就是闵可夫斯基度规 $\eta_{\mu\nu}$, 从而 $g = \det(g_{\mu\nu})$ 的零阶近似就是 -1 。粒子的作用量可以近似为

$$\begin{aligned} S &= -m \int d\tau = -m \int \sqrt{(1 + 2\Phi(\mathbf{x}))dt^2 - d\mathbf{x}^2} \\ &= -m \int dt \sqrt{1 + 2\Phi(\mathbf{x}) - \mathbf{v}^2} \\ &\approx m \int dt \left[\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \Phi(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned} \quad (7.44)$$

由此可见 v^2 与牛顿引力势 Φ 是同阶小量, v 为一阶小量, 因此 Φ 就是二阶小量。

但是对于一个质量为 M 的质点, 其产生的牛顿引力势为 $\Phi = G\frac{M}{r}$, 我们将 M 和 r 理解为有限大小的零阶量, 因此 Φ 为二阶小量就意味着牛顿引力常数 G 应该理解为二阶小量。

对于多质点系统, 由以上假设, 即有

$$p_n^i = p_n^0 v_n^i \ll p_n^0. \quad (7.45)$$

或者说, 相对于零阶的 p_n^0 , 三维动量 p_n^i 是一阶小量。从而容易看出(7.40)式的零阶近似为

$$(p_n^0)^2 \approx m_n^2 \Leftrightarrow p_n^0 \approx m_n. \quad (7.46)$$

进而根据(7.39)式不难看出: T^{0i} 为一阶小量, T^{ij} 为二阶小量, 以及在零阶近似上, 有

$$T_{00} \approx T^{00} \approx \sum_n m_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \equiv \rho, \quad (7.47)$$

即是说, 能量密度就约等于质量密度 ρ , 这实际上就是爱因斯坦的质能关系。同样在零阶近似上, 我们也有

$$T^{0i} \approx T^{ij} \approx 0, \quad (7.48)$$

因为它们都是小量。进一步(在零阶近似上), 也有

$$T \equiv g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \approx -T^{00} \approx -\rho. \quad (7.49)$$

为了得到爱因斯坦场方程的牛顿近似, 我们将场方程 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}$ 进行指标缩并, 进而得到

$$R - \frac{1}{2}4R = \kappa T \Leftrightarrow R = -\kappa T \approx \kappa\rho. \quad (7.50)$$

从而可以将爱因斯坦场方程近似为

$$R_{\mu\nu} \approx \kappa(T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\rho). \quad (7.51)$$

取00分量, 并利用上一节得到的 $R_{00} \approx \nabla^2\Phi$ 以及 $T_{00} \approx \rho$, $g_{00} \approx -1$, 即有

$$\nabla^2\Phi \approx \frac{1}{2}\kappa\rho. \quad (7.52)$$

这就是场方程的牛顿近似。将之与下面的牛顿引力场方程进行比较

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (7.53)$$

即可以定出常数 κ 为

$$\kappa = 8\pi G. \quad (7.54)$$

最终的这个结果我们在引入场方程的那一章中就已经知道了，这里只是给出了这个结果的具体推导过程。这个推导本身也说明了，爱因斯坦场方程在牛顿近似上的确能回到牛顿的引力理论，这本身也是对广义相对论的一个最基本的理论上的检验。

如果将上述近似过程用于带宇宙学常数的爱因斯坦场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (7.55)$$

则在最低阶近似上，我们将得到

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda. \quad (7.56)$$

这是带宇宙学常数的牛顿引力场方程。如果考察的是单个质量为 M 的质点所产生的引力场，则可以取 $\rho = M\delta^3(\mathbf{x})$ ，进而由上述方程的解可以得到引力加速度 \mathbf{g} ，为

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi = \left(-\frac{GM}{r^2} + \frac{\Lambda r}{3}\right)\mathbf{e}_r, \quad (7.57)$$

式中 \mathbf{e}_r 为径向方向的单位矢量。从这个结果可以看到，如果宇宙学常数为负，则它将诱导出一个随距离线性增加的吸引力，而如果宇宙学常数为正，则它所诱导出来的就是一个随距离线性增加的排斥力。天文观测表明，我们的宇宙在加速膨胀，这通常被认为是由于我们的宇宙具有一个正的宇宙学常数，它所产生的排斥力使得宇宙加速膨胀。

7.2 *粒子固有时的一阶和二阶变分公式

第三章中说过，有质量粒子所走的测地线是使得固有时取极大值的路径，但这种说法其实是有漏洞的，这一节我们将具体分析漏洞出在哪里，以及这漏洞和时空曲率有什么关系。具体来说，假设记时空流形为 M ，则

本节要考察的问题是：给定时空中的一段世界线 $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ，如何确定在连接 $\gamma(a) = p$ 到 $\gamma(b) = q$ 的所有可能世界线中，原来的 γ 是否具有极大的固有时？

为此我们需要考察 γ 的变分，也就是考察与 γ 邻近的那些可能世界线。具体来说，我们可以把 γ 嵌入到一个单参世界线簇 $\{\gamma_\sigma\}_{0 \leq \sigma \leq \epsilon}$ 中去，使得 $\gamma = \gamma_0$ (称作基准世界线)，而且这个单参簇的两个端点 p, q 固定，即满足

$$\gamma_\sigma(a) = \gamma(a) = p, \quad \gamma_\sigma(b) = \gamma(b) = q, \quad \forall \sigma \in [0, \epsilon], \quad (7.58)$$

如图(7.3)所示。我们要验证的是，如下定义的函数 $L(\sigma)$ 在 $\sigma = 0$ 处是否具

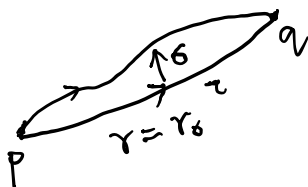


图 7.3: 世界线 γ 的单参变分.

有局部极大值¹,

$$L(\sigma) = \text{世界线段 } \gamma_\sigma \text{ 的固有时长}. \quad (7.60)$$

如果 $L'(0) = 0$, $L''(0) < 0$ (撇号表示对 σ 求导), 则函数 $L(\sigma)$ 在 $\sigma = 0$ 处有局部极大值。如果对所有以 γ 为基准世界线的单参簇 $\{\gamma_\sigma\}$, 均有 $L'(0) = 0$, $L''(0) < 0$, 那就表示 γ 这条世界线与邻近于 γ 的所有其它世界线相比, γ 的固有时都是极大的。所以, 分析的关键是要找到 $L'(0)$, 和 $L''(0)$ 的公式, 也就是所谓的粒子固有时的一阶和二阶变分公式。

记 τ 为世界线本身的参数, 则单参世界线簇就是 $\gamma_\sigma(\tau)$, 它们共同的起点是 $\tau = a$, 共同的终点是 $\tau = b$ 。这个单参世界线簇在局部坐标中的表达是 $x^\mu(\tau, \sigma)$ 。与上一节考察测地线偏离方程不同的是, 现在要求这些世界线在相同的 τ “时间” 之内, 从共同的起点 $\gamma(a) = p$ 到达共同的终点 $\gamma(b) = q$,

¹显然, $L(\sigma)$ 和粒子作用量 S 的关系为

$$S = -mL. \quad (7.59)$$

因此我们无法要求 τ 为单参簇中每一条世界线的固有时，不过，我们可以取 τ 为基准世界线 $\gamma = \gamma_0$ 的固有时。

定义世界线 $\gamma_\sigma(\tau)$ 的切矢量为 $u = \partial_\tau$,

$$u = \partial_\tau = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \partial_\mu, \quad (7.61)$$

因此 $u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}$ 。由于粒子世界线必定从光锥内部穿过，从而必定为类时曲线，即必定满足

$$\langle u, u \rangle < 0. \quad (7.62)$$

又由于 τ 为 $\sigma = 0$ 这条世界线的固有时，所以 $u|_{\sigma=0}$ 必定为这条基准世界线的四维速度，从而有

$$\langle u, u \rangle|_{\sigma=0} = -1. \quad (7.63)$$

注意， $\sigma \neq 0$ 时可没有这个结果。由此我们可以写出函数 $L(\sigma)$ ，为

$$\begin{aligned} L(\sigma) &= \int_a^b d\tau \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}} \\ &= \int_a^b d\tau \sqrt{-\langle u, u \rangle} \equiv \int_a^b d\tau |u|. \end{aligned} \quad (7.64)$$

式中 $|u| \equiv \sqrt{-\langle u, u \rangle}$ ，特别的 $|u|_{\sigma=0} = 1$ 。

为了考察 $x^\mu(\tau, \sigma)$ 随着参数 σ 的变分，我们定义 $\delta x^\mu \equiv \delta\sigma \xi^\mu$ ，式中

$$\xi^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}. \quad (7.65)$$

当然， ξ^μ 的坐标无关化表达就是 $\xi = \partial_\sigma$ 。由于单参簇有共同的固定端点，所以显然有 $\xi^\mu(a) = \xi^\mu(b) = 0$ ，即

$$\xi(a) = \xi(b) = 0. \quad (7.66)$$

另外，由于 σ 和 τ 相互独立，所以显然有

$$[\xi, u] = 0. \quad (7.67)$$

进而利用无挠条件，即有 $D_\xi u = D_u \xi$ 。

利用 $|u|^2 = -\langle u, u \rangle$ 可得 $2|u|\xi(|u|) = \xi(|u|^2) = -\xi(\langle u, u \rangle) = -2\langle D_\xi u, u \rangle$, 即有

$$\xi(|u|) = -\frac{1}{|u|}\langle D_\xi u, u \rangle = -\frac{1}{|u|}\langle D_u \xi, u \rangle. \quad (7.68)$$

进而可得

$$\begin{aligned} L'(\sigma) &= \int_a^b d\tau \frac{\partial}{\partial \sigma} |u| = \int_a^b d\tau \xi(|u|) \\ &= -\int_a^b d\tau \frac{1}{|u|} \langle D_u \xi, u \rangle. \end{aligned} \quad (7.69)$$

特别的, 在 $\sigma = 0$ 处,

$$\left(\frac{1}{|u|}\langle D_u \xi, u \rangle\right)|_{\sigma=0} = \left(\langle D_u \xi, u \rangle\right)|_{\sigma=0} = u(\langle \xi, u \rangle)|_{\sigma=0} - \langle \xi, D_u u \rangle|_{\sigma=0}. \quad (7.70)$$

所以

$$\begin{aligned} L'(0) &= -\int_a^b d\tau \left[\partial_\tau (\langle \xi, u \rangle) - \langle \xi, D_u u \rangle \right]_{\sigma=0} \\ &= -(\langle \xi, u \rangle)|_a^b + \int_a^b d\tau \langle \xi, D_u u \rangle|_{\sigma=0}. \end{aligned} \quad (7.71)$$

利用路径两端的 $\xi = 0$, 即得

$$L'(0) = \int_a^b d\tau \langle \xi, D_u u \rangle|_{\sigma=0}. \quad (7.72)$$

如果对于任意单参簇(从而任意的 ξ), 均有 $L'(0) = 0$, 则 $\sigma = 0$ 的基准世界线必定满足

$$D_u u = 0, \quad (7.73)$$

这正是测地线方程! 所以上面推导只不过是使用一种坐标无关的方式从固有时一阶变分为零导出了测地线方程, 当然, 这也就是重新处理了一遍最小作用量原理。

二阶变分

下面来计算 $L''(0)$, 由本节开头的叙述可以知道, 仅当 $L'(0) = 0$ 时, 计算 $L''(0)$ 才有意义。于是下面我们可以假设 $\sigma = 0$ 的基准世界线 $\gamma = \gamma_0$ 为一条类时测地线。

由(7.69)式, 可得

$$L''(\sigma) = - \int_a^b d\tau \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{|u|} \langle D_u \xi, u \rangle \right). \quad (7.74)$$

利用(7.68)式, 可以把式中的被积项表达为

$$\begin{aligned} & \xi \left(\frac{1}{|u|} \langle D_u \xi, u \rangle \right) \\ &= \frac{1}{|u|^3} \langle D_u \xi, u \rangle^2 + \frac{1}{|u|} \langle D_u \xi, D_\xi u \rangle + \frac{1}{|u|} \langle D_\xi D_u \xi, u \rangle \\ &= \frac{1}{|u|^3} [u(\langle \xi, u \rangle) - \langle \xi, D_u u \rangle]^2 + \frac{1}{|u|} \langle D_u \xi, D_u \xi \rangle \\ & \quad + \frac{1}{|u|} [\langle R(\xi, u) \xi, u \rangle + \langle D_u D_\xi \xi, u \rangle], \end{aligned} \quad (7.75)$$

最后一行我们利用了 $[\xi, u] = 0$, 从而 $R(\xi, u) = D_\xi D_u - D_u D_\xi$ 。

然后, 在上面结果中取 $\sigma = 0$, 并注意到这时候有测地线方程以及 $|u| = 1$, 即

$$D_u u = 0, \quad |u| = 1. \quad (7.76)$$

也即有

$$\langle D_u D_\xi \xi, u \rangle = u(\langle D_\xi \xi, u \rangle) = \frac{\partial}{\partial \tau} (\langle D_\xi \xi, u \rangle). \quad (7.77)$$

最后即得到

$$\begin{aligned} L''(0) &= - \int_a^b d\tau \left[(u \langle \xi, u \rangle)^2 + \langle D_u \xi, D_u \xi \rangle + \langle R(\xi, u) \xi, u \rangle + \frac{\partial}{\partial \tau} \langle D_\xi \xi, u \rangle \right] \\ &= - \int_a^b d\tau \left[(u \langle \xi, u \rangle)^2 + \langle D_u \xi, D_u \xi \rangle + \langle R(\xi, u) \xi, u \rangle \right] \\ & \quad - \langle D_\xi \xi, u \rangle \Big|_a^b, \end{aligned} \quad (7.78)$$

式中 $\langle D_\xi \xi, u \rangle \Big|_a^b$ 为端点项, 但是由于世界线单参簇的端点固定(即在端点处恒有 $\xi = 0$), 所以这个端点项其实恒等于零。再利用 $\langle R(\xi, u) \xi, u \rangle = \langle u, R(\xi, u) \xi \rangle = R(u, \xi, \xi, u) = R(\xi, u, u, \xi) = \langle \xi, R(u, \xi) u \rangle$, 即将上面结果重写成

$$L''(0) = - \int_a^b d\tau \left[(u \langle \xi, u \rangle)^2 + \langle D_u \xi, D_u \xi \rangle + \langle \xi, R(u, \xi) u \rangle \right]. \quad (7.79)$$

重新定义一个变分矢量 η

$$\eta = \xi + \langle \xi, u \rangle u, \quad (7.80)$$

显然, η 与 u 正交, 即满足 $\langle \eta, u \rangle = 0$, 同时 η 在世界线的两个端点处也为零。注意 $\sigma = 0$ 时有测地线方程 $D_u u = 0$, 从而易得 $D_u \eta = D_u \xi + \langle D_u \xi, u \rangle u$, 又注意到 $\langle u, u \rangle = -1$, 进而不难得到

$$\langle D_u \eta, D_u \eta \rangle = \langle D_u \xi, D_u \xi \rangle + \langle D_u \xi, u \rangle^2, \quad (7.81)$$

又由于 $\langle D_u \xi, u \rangle = u \langle \xi, u \rangle - \langle \xi, D_u u \rangle = u \langle \xi, u \rangle$, 从而

$$\langle D_u \eta, D_u \eta \rangle = \langle D_u \xi, D_u \xi \rangle + (u \langle \xi, u \rangle)^2. \quad (7.82)$$

另外, 利用黎曼曲率张量的线性性和反对称性, 可得

$$\langle \xi, R(u, \xi)u \rangle = R(\xi, u, u, \xi) = R(\eta, u, u, \eta) = \langle \eta, R(u, \eta)u \rangle. \quad (7.83)$$

将(7.82)式和(7.83)式代入 $L''(0)$ 的表达式(7.79), 即得

$$L''(0) = - \int_a^b d\tau \left[\langle D_u \eta, D_u \eta \rangle + \langle \eta, R(u, \eta)u \rangle \right]. \quad (7.84)$$

这就是最终的**沿着类时测地线的二阶变分公式**。

仔细看一看二阶变分的这个公式, 我们发现重点是其中再次出现了起决定性作用的时空曲率 $R(u, \eta, u, \eta)$, 这清楚地说明曲率是在二阶扰动(二阶变分)的意义上影响自由下落粒子作用量的。

为了更进一步看清二阶变分公式的物理含义, 我们可以完全类似于前面关于测地线偏离方程的情形, 在沿着测地线 γ 自由下落的局部惯性系中讨论这个二阶变分公式。比方说, 这时候我们也有 $\eta^0 = 0$, $D_u \eta^i = \frac{d\eta^i}{d\tau}$ 。则最终可以将(7.84)式在此局部惯性系中重写成

$$L''(0) = - \int d\tau \left[\left(\frac{d\vec{\eta}}{d\tau} \right)^2 + R_{i00j} \eta^i \eta^j \right]. \quad (7.85)$$

若进一步取上面这个式子的牛顿近似, 并记 $\eta^i \equiv y^i$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L''(0) &\approx - \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} R_{i00j} y^i y^j \right] \\ &\approx - \int dt \left[\frac{1}{2} \dot{y}^2 - \frac{1}{2} (\partial_i \partial_j \Phi) y^i y^j \right]. \end{aligned} \quad (7.86)$$

上式第二行代入了(7.34)式。很显然，这正是第三章引入潮汐力概念时根据牛顿自由落体作用量所得到的结果。

我们可以根据上述结果(7.85)进一步讨论在什么情况下 $L''(0) < 0$ 。首先，假设基准测地线 $\gamma = \gamma_0$ 足够短，即粒子从 p 端点运动到 q 端点的固有时足够短，不妨记这固有时为 τ ，则很显然 $\frac{d\vec{\eta}}{d\tau}$ 在 $\Delta\vec{\eta}/\tau$ 的量级，这里 $\Delta\vec{\eta}$ 为 p, q 之间的相对空间位置矢量。进而即可以作如下估算：

$$\int d\tau \left(\frac{d\vec{\eta}}{d\tau}\right)^2 \sim \tau \left(\frac{\Delta\vec{\eta}}{\tau}\right)^2 = \frac{(\Delta\vec{\eta})^2}{\tau}. \quad (7.87)$$

类似的，

$$\int d\tau [R_{i00j}\eta^i\eta^j] \sim C(\eta, \eta)\tau, \quad (7.88)$$

式中 $C(\eta, \eta) \sim R_{i00j}\eta^i\eta^j$ 。即是说，我们有

$$L''(0) \sim -\left[\frac{(\Delta\vec{\eta})^2}{\tau} + C(\eta, \eta)\tau\right]. \quad (7.89)$$

很显然，当 τ 足够小时，括号中的第一项占主导地位，第二项相比可以忽略。即当 τ 足够小时，我们有

$$L''(0) \sim -\frac{(\Delta\vec{\eta})^2}{\tau} < 0. \quad (7.90)$$

结论就是：当端点 p 和端点 q 离得足够近，从而 p 到 q 的固有时足够短时，必定有

$$L''(0) < 0, \quad (7.91)$$

这时候从 p 到 q 的类时测地线有极大的固有时！

但是，如果从 p 到 q 的固有时很长，那上述结论就不一定成立了，因为这时候二阶变分公式(7.84)中曲率项的贡献就变得很重要，从而使得 $L''(0) < 0$ 不一定成立了。临界的情况当然就是，可能存在某些变分矢量 η ，使得 $L''(0) = 0$ 。

为了更好地分析什么情况下会出现 $L''(0) = 0$ ，我们不妨改写一下二阶变分公式(7.84)。为此我们可以利用 $\langle D_u\eta, D_u\eta \rangle = u\langle \eta, D_u\eta \rangle - \langle \eta, D_u D_u\eta \rangle = \partial_\tau \langle \eta, D_u\eta \rangle - \langle \eta, \frac{D^2\eta}{D\tau^2} \rangle$ 进而对(7.84)式右边的第一项进行分部积分，得到

$$\begin{aligned} L''(0) &= -\int_a^b d\tau \left[-\langle \eta, \frac{D^2\eta}{D\tau^2} \rangle + \langle \eta, R(u, \eta)u \rangle \right] - \langle \eta, D_u\eta \rangle \Big|_a^b \\ &= -\int_a^b d\tau \langle \eta, -\frac{D^2\eta}{D\tau^2} + R(u, \eta)u \rangle. \end{aligned} \quad (7.92)$$

式中第二行我们利用了路径的两个端点处 $\eta = 0$ 。进一步, 利用微分算子 \hat{J}_u 的定义(7.19), 就可以把这个结果简写为

$$L''(0) = - \int_a^b d\tau \langle \eta, \hat{J}_u \eta \rangle. \quad (7.93)$$

很显然, 当变分矢量 η 同时是沿着基准测地线定义的雅可比场时(即满足测地线偏离方程 $\hat{J}_u \eta = 0$ 时), 则有 $L''(0) = 0$ 。也即是说, 只要 p, q 之间存在非零的雅可比场, 那就能使得 $L''(0) = 0$ 的临界情况成立。进而我们可以得到如下重要定理。

为了进一步简化问题, 我们也可以在沿着 γ 自由下落的局部惯性系中进行分析, 这时候上一段的结果就变成,

$$\begin{aligned} L''(0) &= - \int_a^b d\tau \left[\left(\frac{d\vec{\eta}}{d\tau} \right)^2 + R_{i00j} \eta^i \eta^j \right] \\ &= - \int_a^b d\tau \eta^i \left(-\delta_{ij} \frac{d^2}{d\tau^2} + R_{i00j} \right) \eta^j. \end{aligned} \quad (7.94)$$

式中已经利用了 $\eta^i(a) = \eta^i(b) = 0$ 。根据前面讨论雅可比方程时定义的(7.28), 这个结果显然与(7.93)式一致。

(7.94)式的形式激励我们将它类比于一个量子力学能量泛函的变分问题。为此我们考虑定义在区间 $[a, b]$ 上的一维量子力学问题, 取 τ 为一维变量, 取量子力学波函数 $\psi(\tau) = (\eta^1(\tau), \eta^2(\tau), \eta^3(\tau))^T$ (T 表示矩阵转置), 并且波函数在区间两端为零 $\psi(a) = \psi(b) = 0$ 。同时, 我们可以将变分矢量 $\eta^i(\tau)$ 进行适当的归一化, 进而给出波函数归一化条件

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \int_a^b d\tau \psi^T(\tau) \psi(\tau). \quad (7.95)$$

进一步, 取系统的哈密顿算符 H 为

$$H = -\delta_{ij} \frac{d^2}{d\tau^2} + V_{ij} = \hat{J}_u, \quad \text{式中 } V_{ij} = R_{i00j} = -R_{0i0j}. \quad (7.96)$$

则(7.94)式可以写成

$$L''(0) = -\langle \psi | H | \psi \rangle = -E(\psi), \quad (7.97)$$

式中能量泛函 $E(\psi)$ 为

$$E(\psi) = \langle \psi | H | \psi \rangle = \int_a^b d\tau \psi^T(\tau) H \psi(\tau). \quad (7.98)$$

显然, 要分析 $L''(0)$ 是否恒小于零, 关键是要分析能量泛函 $E(\psi)$ 的最小值, 也就是上述量子力学系统基态的能量, 只要这个基态能量大于零, 那即有 $L''(0) < 0$, 反过来也一样。不妨固定区间 $[a, b]$ 的 a 端, 将基态能量看成 b 的函数, 记作 E_b , 即

$$E_b = \min_{\psi} \{E(\psi)\}. \quad (7.99)$$

由前面对固有时足够小时(即 $b - a$ 足够小)的分析可知, 当 $b - a$ 足够小时, 能量泛函 $E(\psi)$ 是正定的, 从而必有 $E_b > 0$ 。

进一步, 可以论证基态能量 E_b 关于 b 是单调递减的, 原因在于, 一个更小区间的基态波函数可以自然地作为一个更大区间的能量泛函变分的试探波函数。具体来说, 假设 $a < b_1 < b$, 假设 $\psi_0(\tau)$ 为 $[a, b_1]$ 区间上的基态波函数, 则我们可以自然地定义 $[a, b]$ 区间上的试探波函数 $\psi(\tau)$ 为

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \psi_0(\tau), & \tau \in [a, b_1] \\ 0, & \tau \in [b_1, b] \end{cases}. \quad (7.100)$$

真正基态的能量当然比试探波函数对应的能量要低, 从而必有 $E_b \leq E_{b_1}$ 。

进而结合上面两段的结果可知, 要让某个大的区间 $[a, b]$ 上的 $E_b \leq 0$, 充要条件是, 存在某个小一些的临界 c , $a < c < b$, 使得 $E_c = 0$, 即是说 $H\psi(\tau) = 0$ 在 $[a, c]$ 区间上有非零解。由于 $H = \hat{J}_u$, 因此这也意味着雅可比方程 $\hat{J}_u \eta^i = 0$ 在 $[a, c]$ 区间上有满足 $\eta(a) = \eta(c) = 0$ 的非零解。这也就说明, $\gamma(c)$ 是 $\gamma(a)$ 的共轭点。结论就是, 在某个大区间 $[a, b]$ 上, $E_b \leq 0$ (进而相应基态使得 $L''(0) \geq 0$)的充要条件是, 在 $\gamma(b)$ 和 $\gamma(a)$ 之间存在 $\gamma(a)$ 的一个共轭点 $\gamma(c)$ 。进而即有如下重要定理。

重要定理: 设 γ 是一条连接时空中 p, q 两点的类时曲线, 对应固有时参数区间 $[a, b]$, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ 。则 γ 的固有时取其任意单参变分(固定 p, q 点)极大值的充要条件是, γ 是一条类时测地线, 并且在 p, q 两点之间不存在任何点 p 的共轭点。

证明概要: 首先, 假设 γ 不是一条测地线, 则根据一阶变分公式(7.72), 我们总可以选取一个合适的变分矢量 ξ , 使得 $L'(0) > 0$, 从而 γ 的固有时就不是极大值。

其次, 假定 γ 是一条类时测地线。则根据上面的讨论, 存在变分矢量 η 使得 $L''(0) \geq 0$ 的充要条件是在 p, q 两点之间存在点 p 的共轭点 r 。不仅如此, 还可以进一步证明, 假设存在共轭点 r , 则必定存在变分矢量 η 使

得 $L''(0) > 0$ (去掉了等于号)。因此这种情况下, γ 的固有时也不是取极大值。

证明如下, 假设在 p, q 两点之间存在点 p 的共轭点 r 。则根据共轭点的定义, 在 p, r 之间存在一个非零的雅可比场 η_0 , 它满足雅可比方程 $\widehat{J}_u \eta_0 = 0$, 同时满足 $\eta_0(p) = \eta_0(r) = 0$ 。因此这时候我们可以定义如下非零变分矢量 η

$$\eta = \begin{cases} \eta_0, & \text{在 } p, r \text{ 之间} \\ 0, & \text{在 } r, q \text{ 之间} \end{cases} \quad (7.101)$$

显然, 对于这个变分矢量有 $L''(0) = 0$ 。进而我们只要将这个变分矢量在拐角 r 处进行适当的圆滑化(如图(7.4)所示), 以降低(7.94)式中 $(\frac{d\eta}{dt})^2$ 项在拐角处的贡献, 进而就可以得到一个新的使得 $L''(0) > 0$ 的单参变分。



图 7.4: 连接 p, q 的类时测地线 γ 上有点 p 的共轭点 r , 可以将变分矢量在拐角 r 处适当圆滑化, 得到一条新的类时曲线 γ' , γ' 的固有时长于 γ 。

反过来, 假设 γ 是一条类时测地线, 与此同时在 p, q 之间不存在任何点 p 的共轭点。则这时候根据上述讨论的充分必要性可知, 必有 $E_b > 0$, 进而对于任意单参变分, 均有 $L''(0) < 0$, 从而这时候 γ 的固有时就的确取极大值。**证明完成。**

上述定理对于彭罗斯和霍金的奇性定理的证明来说至关重要, 不过, 就本章来说, 这个定理的重要性在于, 它是关于固有时二阶变分公式, 进而关于时空曲率意义的一个重要说明。