目录

第一章 引力的普适性以及非欧几何

陈童

1.1 万有引力的特性

1.1.1 引力的普适性

引力是自然界中最为特殊的一种力，特殊就特殊在它的普适性，一切物质之间，无论是太空中的还是地面上的，无论是星辰还是大海，一切物质之间都有引力相互作用，这就是牛顿所谓的万有引力，万有二字就是强调它的普适性。实际上，我们可以利用引力的普适性给物质下一个定义：问，什么是物质？答，能够产生引力相互作用的东西就是物质！

而衡量一个物体产生引力相互作用能力的一个量即是质量，更准确地说是引力质量，记作m_G。根据物质的定义，m_G也可以作为物质的量的一个度量。

除了引力之外，自然界中另一种普适性的存在即是物质的惯性(Inertia)，也就是物质保持其运动状态的能力，一切物质都有惯性。我们也可以利用惯性的普适性给物质下一个不同的定义：问，什么是物质？答，具有惯性的东西就是物质。

而衡量一个物体惯性大小的量就是惯性质量，记作m_I。根据物质的这第二个定义，m_I同样可以作为物质的量的一个度量。

由于起源看起来完全不同，物质的量的这两种度量，m_G和m_I，原则上应该不同。但是，伽利略发现，对任何物质，都有引力质量和惯性质量刚好相等，

$$m_G = m_I. \tag{1.1}$$

这两者为何相等？这在爱因斯坦之前可以说是物理学最大的未解之谜。

伽利略是如何发现引力质量和惯性质量正好相等的呢？回答是，伽利略将引力的普适性和惯性的普适性联系起来了，因为他发现，一切物质在重力作用下自由下落的规律是普适的！换言之，伽利略发现，一切物质(无论其组成成分为何)在相同的重力作用下都有相同的加速度，即(记g为重力强度)

$$a = (m_G/m_I)g \tag{1.2}$$

是一个不依赖于具体物质的普适量。很显然，这除非m_G/m_I是一个普适常数，进而只要适当选取单位，就可以使得$m_G = m_I$。

爱因斯坦是如何解释引力质量为什么等于惯性质量的呢？简单地说，爱因斯坦发展了伽利略的思路，进一步提出，引力的普适性和惯性的普适性本质上是一回事。具体来说就是爱因斯坦的等效原理。好了，让我们暂且打住，关于等效原理我们留到后面的章节再详加讨论。暂时我们只需要知道，惯性质量和引力质量相等是将爱因斯坦导向广义相对论的关键线索，有时候也称之为弱等效原理。

$m_G = m_I$的弱等效原理可谓久经实验检验。伽利略本人就利用了单摆，通过选择不同物体作为摆锤，并分析单摆周期是否有变化来检验弱等效原理，精度可以达到约10^{-3}。19世纪末，厄缶(Eötvös) 提出利用扭秤平衡来精巧地检验弱等效原理，这可以使得精度达到10^{-9}。2017年底，MICROSCOPE卫星实验把精度提高到了10^{-14}，即是说在10^{-14}的精度范围内，引力质量都等于惯性质量。而基于卫星试验的SETP(Satellite Test of Equivalence Principle)更是计划把精度提高到10^{-17}。

正因为引力质量等于惯性质量，所以之后再提到物体质量时，我们就不再区分是引力质量还是惯性质量了，而是统一称为质量，记为m。

前面说过，质量是衡量物质产生引力相互作用能力的一个量。根据牛顿的万有引力定律，质量为M和m的两个粒子之间的万有引力势能为

$$V = -G\frac{Mm}{r}, \tag{1.3}$$

式中r是两粒子之间的距离，G为牛顿万有引力常数。而在场论的观点中，物体之间之所以有引力相互作用，是因为一个物体产生了一个引力场，这个引力场作用在另一个物体上。因此是M产生了一个引力场，记为引力势Φ, Φ作用在m上，得到万有引力势能$V = m\Phi$。也即是说，这里的$\Phi = -G\frac{M}{r}$, 很显然它满足方程

$$\nabla^2\Phi = 4\pi GM\delta^3(\mathbf{x}). \tag{1.4}$$

这个方程可以从点粒子质量密度$M\delta^3(\mathbf{x})$推广到任意的质量密度$\rho(\mathbf{x}, t)$，它产生的引力势满足

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \tag{1.5}$$

即是说，质量密度是引力场的源，质量密度产生引力场。而根据狭义相对论中爱因斯坦的质能关系，质量密度其实是一种能量密度。因此即是说，物质的能量密度是引力场的源！

然而能量密度不过是能量-动量张量的00分量，记为T_{00}，因此方程(1.5)就成为

$$\nabla^2\Phi = 4\pi GT_{00}. \tag{1.6}$$

但这个方程不是洛伦兹协变的，为了让它洛伦兹协变，我们显然应该将引力场的源推广为整个能量-动量张量$T_{\mu\nu}$(这是一个二阶对称张量)，那这时候相应的，引力势Φ也要推广成某个张量场$h_{\mu\nu}$。即是说，在相对论中，引力场应该用某个二阶对称张量场$h_{\mu\nu}$来刻画。出人意料的是，爱因斯坦将$h_{\mu\nu}$与时空的几何联系了起来，并确定了引力其实是时空弯曲的一种显现。

引力的普适性就反映在，一切物质都有能量-动量张量，而能量-动量张量正是引力场的源，所以一切物质都能产生引力。

接受引力是时空弯曲这一结论并不难。**真正难的有两点：第一点是搞清楚为什么？为什么时空可以弯曲？为什么引力是时空弯曲？第二点是，在数学上如何描述与刻画时空弯曲？** 要搞懂第一个难点就需要爱因斯坦关于等效原理的洞察，我们留给后面的章节讨论。而我们下一节将要简单论述的非欧几何就涉及第二个难点。

另一方面，我们可以稍微深入地探讨一下弱等效原理。为此假设有一个引力场，其引力势为$\Phi(\mathbf{x})$，即是说，$\mathbf{x}$处质量为m的粒子具有引力势

能$m\Phi(\mathbf{x})$。进而粒子在引力场中自由下落的作用量就可以写成

$$S = m\int dt\big[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - \Phi(\mathbf{x})\big]. \tag{1.7}$$

从这个作用量中，我们很容易看清伽利略发现的自由落体的普适性，也就是弱等效原理，那就是，粒子质量只作为一个整体的常数因子而出现！(所以粒子的运动微分方程和质量无关。) 进一步，为了保证弱等效原理在相对论情形中依然成立，我们必须要求，粒子质量即使在相对论性的自由落体作用量中，也只能作为一个整体常数因子而出现！至于具体如何将自由落体作用量推广到相对论情形，我们也留到后面的章节。

1.1.2 万有引力是一种吸引力

万有引力的第二个特性是，它总是一种吸引力。这个特性看起来平凡，实际上却有很深远的影响。不妨设想一个质量非常大的物体，其质量大到这种程度以致于其自身无法支撑自身的吸引力，那它就会坍缩！

实际上，我们知道恒星是靠热核反应而发光发热的，当热核反应耗光能量而终止时，按照牛顿的万有引力理论，恒星就会坍缩，一直坍缩下去。当它坍缩到一定程度，引力场就会变得很强，这时候牛顿的理论就不适用了。但是，即使在爱因斯坦的广义相对论中，引力总是吸引这个特性依然存在。所以引力坍缩现象即使在广义相对论中也依然存在。

印度人钱德拉塞卡发现，当恒星的质量小于一个数值时，它最终就会坍缩成白矮星。白矮星的半径很小，但密度很大，并且会发出白光。如果恒星质量小于某个数值，那它坍缩成白矮星以后，其内部的电子简并压就能抗住自身引力的吸引，它就不再坍缩了。但是，如果恒星质量比这个数值要大，那它就还会继续坍缩。朗道认为，只要恒星的质量不超过2个太阳，它就会坍缩成一种更小的东西，叫中子星。这以后其内部的中子简并压就能抗住自身的引力，它就不再坍缩了。

但是，如果恒星的质量超过2个太阳会怎么样呢？这时候，中子简并压也抗不住自身引力了，它就会一直坍缩下去，最终形成黑洞！什么是黑洞呢？就是时空中的一个区域，它的吸引力强到这样的地步，最后甚至连光都无法从这个区域逃逸出去，所以它看起来是黑的，叫黑洞。

万有引力总是一种吸引力，然而天文观测发现，我们的宇宙在膨胀，不可思议的是，这还是一种加速膨胀，即是说，即使万有引力的相互吸引也没有使得宇宙膨胀的速度减慢。宇宙为什么会加速膨胀呢？这个问题我

们留到学完广义相对论的基本方程以后再来探讨。暂时只提一句，这和神秘的暗能量有关！

1.2　非欧几何

在搞清楚引力如何与时空弯曲产生联系之前，这一节先让我们简单回顾一下数学家是如何想到研究弯曲空间的，以及他们是如何研究弯曲空间的。

1.2.1　内禀几何与高斯坐标

因为研究大地测量学的需要，高斯系统地研究了三维空间的两维曲面。高斯的研究有一个深刻的发现，根据这个发现，三维空间中的球面和无穷长的圆柱面有本质的区别！你可能会说，两者不都是曲面吗？不都有弯曲吗？有什么本质区别呢？回答是，高斯发现，的确，球面是弯曲的，但是，圆柱面在某种意义上却是平坦的！

对于一个半径为R的两维球面，过球面上任意一点，我们总可以作两个正交的大圆，每个大圆的曲率均为$1/R$，球面的弯曲情况可以很好地由这两个大圆的弯曲情况决定，因此可以将这两个大圆曲率的乘积$1/R^2$定义成球面的曲率，称作球面的高斯曲率，记作$K = 1/R^2$。类似的，对于竖直放置的圆柱面，过其上任意一点，我们都可以作一条高，它是直线，因此曲率为零，同时还可以作一个水平的圆，其曲率不为零。但是，这两条曲线曲率的乘积为零，因此，圆柱面的高斯曲率为零，记作$K = 0$。

实际上，对于任何两维曲面，高斯都类似地定义了一个高斯曲率K，它一般来说是曲面上不同点的函数，因为对于非球面，它上面不同点的弯曲情况可以不同。高斯曲率的最初定义依赖于曲面上的曲线在三维空间中的弯曲情况，也即是说，依赖于两维曲面是如何嵌入到三维空间中的。然而，高斯发现，这个曲率其实是曲面内禀的性质，与它们怎么嵌入在三维空间中没有关系！特别的，高斯曲率为零的曲面就可以在不拉伸也不挤压的情况下在平面上展平，而高斯曲率非零的曲面就做不到这一点。比方说，圆柱面可以沿着高的方向剪开，并摊平(因此本质是平坦的)，但是球面就无法摊平。

高斯关于内禀曲率的发现可谓影响深远，实际上，高斯本人已经意识到这个发现的深刻含义，所以他称之为绝妙定理，现在通常称作**高斯绝妙**

定理(Gauss theorem egregium)!

高斯如何研究两维曲面呢? 其方法首先是通过在曲面上引入任意的曲线坐标，称作高斯坐标。比如，对于三维空间中由方程$x^2+y^2+z^2=R^2$给出的两维球面S^2，可以引入球坐标(θ,ϕ), 即定义$x=R\sin\theta\cos\phi, y=R\sin\theta\sin\phi, z=R\cos\theta$。很显然，球坐标并非在整个球面上都定义良好，比方对于$\theta=0$和$\theta=\pi$的北极点和南极点，球坐标就没有定义。也即是说，高斯坐标通常不能覆盖整个曲面，而只能覆盖曲面的某个局部区域。但是，高斯的新想法是，曲面上的高斯坐标可以是任意两个与曲面上的点一一对应的**独立变量**，一个高斯坐标无法覆盖整个曲面，那就可以用多个相互有交叠的高斯坐标来覆盖。

其次，高斯引入了度规的概念(虽然当时不叫度规)，也就是研究曲面上邻近两点之间的距离ds。比方说，对于球面的球坐标而言，由于球面嵌在三维欧几里得空间中，所以可以代$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$, 代入球坐标，即可得球面上相邻两点间的距离

$$ds^2=R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2). \tag{1.8}$$

这个ds^2就称作球面上的度规。

但是，高斯说了，可以使用任意局部坐标(x^1,x^2)，很显然，对于任何曲面，其上两邻近点的距离平方总可以写成

$$ds^2=g_{ij}dx^idx^j, \quad \text{这里} \quad i,j=1,2. \tag{1.9}$$

由于dx^idx^j关于i,j指标对称，所以这里g_{ij}也关于i,j指标对称。很多时候，我们也把g_{ij}同样称作度规或者度规系数。比方说，对于球面的球坐标，就有$g_{\theta\theta}=R^2$, $g_{\phi\phi}=R^2\sin^2\theta$, $g_{\theta\phi}=g_{\phi\theta}=0$。

假设我们作一个局部坐标变换

$$(x^1,x^2)\to(x'^1,x'^2) \tag{1.10}$$

则由$ds^2=g_{ij}(x)dx^idx^j=g'_{ij}(x')dx'^idx'^j$, 就可以得到变换以后的度规系数$g'_{ij}(x')$ 为

$$g'_{ij}(x')=g_{kl}(x)\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}. \tag{1.11}$$

高斯绝妙定理说的就是，曲面的高斯曲率K完全由曲面内禀的度规g_{ij}决定，不依赖于曲面是如何嵌入三维空间中的。

1.2.2 非欧双曲几何的发现

从古希腊开始的两千年来，数学家和哲学家一直认为欧几里得几何是我们的世界不言而喻的真理。其中，空间邻近的两点(x,y,z)和$(x+dx,y+dy,z+dz)$ 之间的距离ds满足毕达哥拉斯定理

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{1.12}$$

然而，在19世纪20年代，由于对欧几里得几何平行公设的研究，三个数学家，高斯、鲍耶、以及罗巴切夫斯基，相互独立地发现了非欧双曲几何。

非欧双曲几何是一种不同于欧几里得平面几何的两维几何，庞加莱曾经用一个单位圆盘世界来描绘它。庞加莱圆盘世界就是(x,y)平面内半径为$2R$的圆盘$x^2+y^2 \le 4R^2$。在生活于这个圆盘世界的人看来，两个邻近的点(x,y)和$(x+dx,y+dy)$ 之间的距离由下式给出

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{(1-\frac{x^2+y^2}{4R^2})^2}. \tag{1.13}$$

也就是说，同样的坐标差(dx,dy)，在圆盘中心的人看来是一个很小的距离，而在圆盘边缘的人看来却是一个很大的空间距离，(1.13)包含了两点间距离的所有信息，称为庞加莱圆盘的度规。

奇妙的是，庞加莱圆盘世界的人眼中的直线(两点之间的最短线) 不同于我们眼中的直线。比方说，连接圆盘边缘附近两点A,B的直线(最短线)就不是我们眼中的直线，为了使得走过的距离尽可能短，一个从A点出发的人不会直接走向B，而是会将路径向着圆盘中心的方向弯，因为同样的坐标差在圆盘中心处对应更短的距离，因此让路径弯向圆盘中心可以节省距离。

比方说，如果我们考虑的这两个点A,B就在圆盘边缘上，那么从(1.13)可以看出，直接沿着边缘从A到B将是一个无穷大的距离，因为度规在边缘是发散的。从A出发，为了最快地走向B, 你应该先沿着圆盘的径向走，以使得度规尽快地降下来，然后你再弯向B。实际上，庞加莱圆盘世界的直线是所有和圆盘边缘垂直相交的圆弧，如图(1.1)所示。

值得注意的是，在我们眼中，单位圆盘内的直线长度都是有限的，然而，在庞加莱世界的人看来，其直线的长度是无穷的，可以向两端无限延伸。为了看清楚这一点，我们不妨在单位圆盘上取极坐标(r,θ), 并且定义坐标变换$\frac{r}{2R}=\tanh(\rho/2)$, ρ取值范围是$[0,+\infty)$, 在变换以后的坐标中，度

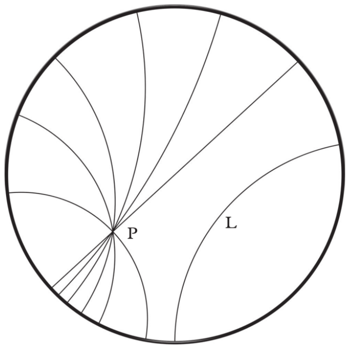

图 1.1: 在庞加莱圆盘世界中，过直线外一点，可以作无数多条直线与已知直线永不相交。

规的表达式(1.13)就变成了，

$$ds^2 = R^2(d\rho^2 + \sinh^2\rho d\theta^2). \tag{1.14}$$

庞加莱圆盘的边缘现在变到了无穷远处，因此，在庞加莱圆盘世界的人看来，圆盘的边缘实际上意味着无穷远。我们也注意到，只要ρ大到一定程度，(1.14)中度规的系数就一定大于R^2，因此ρ坐标值的无穷远实际上也意味着度规距离的无穷远，因此，在庞加莱圆盘世界的人看来，其直线可以向着无穷远无限延伸。

那么，在庞加莱世界中，何为两条直线相互平行呢? 通常的定义是, 两条永远不相交的直线就是相互平行的，这当然正是我们在欧几里德平面几何中对平行线的自然定义。然而，稍微画画图你就能够看出来，如果这样定义平行，那么在庞加莱圆盘世界中，过直线外一点可以作无数条直线和已知直线平行，如图(1.1)所示。并且，庞加莱圆盘世界的两条平行线之间的距离并非固定不变。如果你从圆盘边缘出发，引两条在边缘处坐标值靠得很近的直线，假如这两条直线不相交，那么你可以很容易地看到，这样的两条平行线之间的距离会以一个恒定的速率增大。两条平行线之间的距离会越来越大实际上说明了庞加莱圆盘世界是一个空间弯曲的世界，而且高斯曲率是负的(如果高斯曲率为正，那么邻近的平行线只会越来越近，比如球面上的两个大圆)。同时，平行线距离增加的速率为定值还说明庞加莱世界的高斯曲率是一个常数，实际上$K = -1/R^2$。之所以庞加莱圆盘看起来在一个平坦的两维平面上，是因为我们通过局部的拉伸和挤压把这个弯曲世界画在了两维平面上。

现在，在庞加莱圆盘内取三条直线(三条和边缘垂直相交的圆弧)，它们将会交出一个三角形，很显然，这个三角形的内角和小于180度。假如我们记这个三角形的内角和为Δ, 那么高斯博内特公式告诉我们，

$$\Delta = \pi - S/R^2 \tag{1.15}$$

式中S表示这个三角形的面积。为了更好地理解这个公式，你可以在三维空间的半径为R的球面上取一个由三个大圆组成的三角形，你会发现，对于球面S^2上的这些三角形而言，其内角和Δ必定大于180度，并且符合公式$\Delta = \pi + S/R^2$。这是因为球面的高斯曲率为$+1/R^2$，所以面积对三角形内角和的修正是正的，而庞加莱圆盘的高斯曲率为$-1/R^2$, 所以面积对三角形内角和的修正应该是负的。

这就带来两个有趣的结论，第一，如果庞加莱圆盘世界的人只在很小的范围内活动，考虑的总是很小的三角形(边长$\ll R$), 那么这些三角形的内角和就近似地等于π, 欧几里德几何近似地成立，这就是所谓的**局部平坦**。第二，庞加莱圆盘世界的三角形面积有上限，最大值为πR^2。

庞加莱圆盘世界的哪些三角形有最大面积πR^2呢？答案非常简单，所有三个角都落在圆盘边缘上的三角形面积都是πR^2。这是因为三角形必须由三条直线构成，而庞加莱圆盘世界的直线在圆盘边缘一定和边缘相垂直，这样一来，落在边缘的角的两条边只能相切，夹角为0。也就是说，三个角都落在圆盘边缘的任意三角形内角和必定为零，由(1.15)，这就意味着这些三角形的面积为πR^2。

由于非欧双曲几何的发现，以及对三维空间中曲面的研究，高斯成为了第一个思考我们所居住的三维空间可能不是人们一直假设的平坦的欧几里得空间，而可能是某种弯曲空间的人。由于知道在弯曲空间中，三角形的内角和不是180度，所以高斯在德国中部哈尔兹山脉的三座山峰上安装了测量设备，以连接这些山峰的最短线为三角形的边(高斯假设从一座山峰到另一座山峰的光线走这条最短路径)。高斯测量了在每座山峰相遇的两条边之间的夹角，以确定三角形内角和是否为π。他发现结果确实为π，并得出结论，空间确实是欧几里得的。不过，高斯的思想深刻地影响了他的学生黎曼，使得黎曼成为第一个研究高维(高于两维)弯曲空间的人，这就是所谓的黎曼几何。

要把高斯的内禀几何推广到任意维空间，关键是要推广高斯曲率的概念！黎曼提出黎曼几何的时候正是完成了这个推广工作。值得强调的是，这样的推广是高度非平凡的，这是因为，刻画两维空间的曲率只需要一个

数，但是高维空间就有许多不同的弯曲方向，因此就不能简单地用一个数来刻画其曲率，如何刻画高维空间的弯曲也就成了一个难题。最终黎曼通过定义黎曼曲率张量解决了这个问题。

1.2.3 局部平坦与黎曼曲率

为了将曲率的概念推向任意维弯曲空间，我们需要进一步研究两维内禀几何的一个重要性质，就是前面提及的局部平坦！下面让我们首先搞清楚局部平坦的准确含义。

古时候的人不知道地球是球体，他们一直以为大地是平的。这反映了两维球面的局部平坦性，即，在一个足够小的局部区域看来，球面是平坦的。为了看清楚局部平坦的准确含义，让我们考察球面的一种特殊局部坐标。具体来说，对于三维空间中由方程$x^2+y^2+z^2=R^2$给出的两维球面S^2, 它在南极点$(0,0,-R)$附近近似有$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\approx -R+\frac{x^2+y^2}{2R}$，代入$ds^2=(dx^2+dy^2+dz^2)|_{S^2}$, 即可得

$$\begin{aligned}
ds^2 &\approx dx^2+dy^2+\frac{(xdx+ydy)^2}{R^2} \\
&= dx^2+dy^2+O\Big((\frac{x}{R})^2,(\frac{y}{R})^2,(\frac{x}{R})(\frac{y}{R})\Big) \\
&= (1+\frac{x^2}{R^2})dx^2+(1+\frac{y^2}{R^2})dy^2+2\frac{xy}{R^2}dxdy. \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

式中O表示二阶小量。也即是说，在南极点附近，球面S^2上局部坐标(x,y)的度规直到一阶小量为止都是平直的欧氏平面度规，只在二阶小量上有修正，这就是局部平坦。换言之，由于局部平坦，在南极点附近我们总可以取局部欧氏坐标系(x,y), 其相应度规系数在南极点处的一阶偏导都是零，而二阶偏导正比于球面的曲率$1/R^2$!

但是，对于两维球面来说，南极点并没有什么特殊的。南极点附近局部平坦则球面任意点附近都局部平坦，而局部平坦的准确含义就是：**在任意给定点附近我们总可以取这样的局部坐标系，使得其度规在这点上等同于平坦的欧氏度规，并且这个度规在这点处的一阶偏导为零，而二阶偏导正好反映球面内禀的高斯曲率！**

黎曼推广高斯内禀几何的关键就在于注意到其本质，即任何弯曲的曲面都可以看成是将无限多个平坦的无穷小局部拼接起来的！也就是将无限多个局部平坦的坐标系在度规的二阶偏导上拼接起来，使得高斯曲率的定义不依赖于特定的坐标系。

黎曼首先将高斯坐标以及度规的概念推广到了任意D维空间，即对于D维空间的任意局部坐标$x^\mu, \mu = 1, 2, ..., D$，黎曼引入了两相邻点之间的距离平方(也称作线元)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \tag{1.17}$$

同样的，度规系数$g_{\mu\nu}$关于两个指标对称。局部坐标当然可以任意选，只要和D维空间的点一一对应即可，但刻画两点间距离的线元必须在局部坐标变换下保持不变。即假设将局部坐标从x^μ变换到x'^μ，必定有

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = g'_{\rho\sigma}(x')dx'^\rho dx'^\sigma. \tag{1.18}$$

即在坐标变换下，度规系数按如下方式变换

$$g_{\rho\sigma}(x) \to g'_{\rho\sigma}(x') = g_{\mu\nu}(x)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}. \tag{1.19}$$

特别的，对于平坦的D维欧几里得空间，我们总可以选择笛卡尔直角坐标系，从而使得

$$ds^2 = \delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{1.20}$$

当然，笛卡尔直角坐标系不是唯一的，因为可以作一个坐标系的正交旋转。由于任意两个不同的直角坐标方向都可以构成一个独立的转动平面，所以独立的坐标系旋转共有$\frac{1}{2}D(D-1)$个。

利用方程(1.19), 黎曼可以证明，高斯内禀几何局部平坦的性质在高维中依然可以保持。具体证明如下：首先，任选一个点P, 不妨假设P点的局部坐标为$x^\mu = 0$。将度规在P点附近展开到二阶

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(0) + A_{\mu\nu,\rho}x^\rho + B_{\mu\nu,\rho\sigma}x^\rho x^\sigma + ... \tag{1.21}$$

式中$A_{\mu\nu,\rho}$和$B_{\mu\nu,\rho\sigma}$均为关于$\mu\nu$指标对称的常数，而且由于$x^\rho x^\sigma$关于指标$\rho\sigma$对称，所以$B_{\mu\nu,\rho\sigma}$也关于$\rho\sigma$指标对称。注意到在D维空间，两个对称指标共有$\frac{1}{2}D(D+1)$个独立的可能性，所以$A_{\mu\nu,\rho}$共有$\frac{1}{2}D(D+1)D = \frac{1}{2}D^2(D+1)$个独立分量，而$B_{\mu\nu,\rho\sigma}$有$\left(\frac{1}{2}D(D+1)\right)^2$个独立分量。

其次，作如下坐标变换

$$x^\mu = K^\mu{}_\nu x'^\nu + L^\mu{}_{\nu\rho}x'^\nu x'^\rho + M^\mu{}_{\nu\rho\sigma}x'^\nu x'^\rho x'^\sigma + ... \tag{1.22}$$

式中$L^\mu{}_{\nu\rho}$关于$\nu\rho$指标对称，而$M^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ 关于3个指标$\nu\rho\sigma$全对称。证明高维内禀几何依然局部平坦的关键在于：证明总可以通过合适地选择系数$K^\mu{}_\nu$、$L^\mu{}_{\nu\rho}$使得在新坐标x'中的度规系数$g'_{\mu\nu}(x')$满足两个条件，其一，$g'_{\mu\nu}(P)$为欧氏度规系数$\delta_{\mu\nu}$，其二，$g'_{\mu\nu}(x')$在P点处的一阶偏导等于零，也就是总可以完全消去度规的一阶展开系数$A_{\mu\nu,\rho}$。

证明并不难，我们可以按照上面级数展开逐阶进行证明。首先，在级数展开的零阶，由方程(1.19)，显然有

$$g'_{\rho\sigma}(0) = g_{\mu\nu}(0)K^\mu{}_\rho K^\nu{}_\sigma. \tag{1.23}$$

假设将$g_{\mu\nu}(0)$记作对称矩阵g，$g'_{\rho\sigma}(0)$记作对称矩阵g'，$K^\mu{}_\rho$记作矩阵K，那么上式即是

$$g' = K^T gK, \tag{1.24}$$

这里T表示矩阵转置。线性代数的定理告诉我们，对于正定的对称矩阵g，总是存在矩阵K，使得它被对角化成单位矩阵。即总是存在$K^\mu{}_\rho$，使得变换之后的$g'_{\mu\nu}(0) = \delta_{\mu\nu}$。

值得提及的是: $K^\mu{}_\rho$共有D^2个独立分量，而对称的$g_{\mu\nu}(0)$共有$\frac{1}{2}D(D+1)$个独立分量。所以为了将$g_{\mu\nu}(0)$变换为$\delta_{\mu\nu}$需要用去$K^\mu{}_\rho$的$\frac{1}{2}D(D+1)$个独立分量，还剩下$D^2-\frac{1}{2}D(D+1)=\frac{1}{2}D(D-1)$个自由分量。正好对应笛卡尔直角坐标系的$\frac{1}{2}D(D-1)$个独立旋转！

现在，假设$g_{\mu\nu}(0)$已经变换成$g_{\mu\nu}(0)=\delta_{\mu\nu}$了。也就是说假设度规可以展开为

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} + A_{\mu\nu,\rho}x^\rho + ... \tag{1.25}$$

我们将继续证明可以通过坐标变换的下一阶完全消去$A_{\mu\nu,\rho}$。为此只需考虑坐标变换

$$x^\mu = x'^\mu + L^\mu{}_{\nu\rho}x'^\nu x'^\rho.... \tag{1.26}$$

结果几乎是显然的，因为我们可以自由调节的系数$L^\mu{}_{\nu\rho}$的个数和我们要消去的系数$A_{\mu\nu,\rho}$一样多，都是$\frac{1}{2}D(D+1)D=\frac{1}{2}D^2(D+1)$个！所以我们的确可以通过合适选取$L^\mu{}_{\nu\rho}$来完全消去$A_{\mu\nu,\rho}$。至此就已经证明了高维内禀几何也有局部平坦的性质！

现在，我们可以假设

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} + B_{\mu\nu,\rho\sigma}x^\rho x^\sigma + ..., \tag{1.27}$$

相应的坐标变换可以假设为

$$x^\mu = x'^\mu + M^\mu{}_{\nu\rho\sigma} x'^\nu x'^\rho x'^\sigma + ... \tag{1.28}$$

根据前面关于局部平坦的讨论可以知道，系数$B_{\mu\nu,\rho\sigma}$反映的正是空间在P点的弯曲情况。但是空间在P点的曲率应该不依赖于局部坐标系，所以并非$B_{\mu\nu,\rho\sigma}$的所有分量都可以用来刻画曲率，我们还要讨论能够通过调节坐标变换系数$M^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$消去多少个与曲率无关的分量。

为此我们需要考察有多少个可调节的变量$M^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$。首先将注意力集中在全对称指标$\nu\rho\sigma$上, 它有多少种独立可能性呢? 不妨记有$f(D)$种可能性，由于是三重指标，所以$f(D)$必然是D的三次多项式，并且当然$f(0) = 0$, 所以不妨将$f(D)$写成$f(D) = (aD^2 + bD + c)D$，其中a, b, c为3个待定常数。下面我们可以用数据拟合法找出$f(D)$的具体函数形式。首先，$f(1) = 1$(即只有三个指标全取1这一种可能性)。其次，为了找出$f(2)$, 我们不妨利用全对称性，假设三个指标ν, ρ, σ间满足$\nu \geq \rho \geq \sigma$，所以只有$222, 221, 211, 111$这四种独立可能性，即$f(2) = 4$。类似的，可以得到$f(3) = 10$。根据$f(1)$、$f(2)$以及$f(3)$的值，我们就能定出待定常数$a, b, c$, 进而得到$f(D) = \frac{1}{6}D(D+1)(D+2)$。所以$M^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$的独立分量个数为

$$Df(D) = \frac{1}{6}D^2(D+1)(D+2). \tag{1.29}$$

因此，在$B_{\mu\nu,\rho\sigma}$的$\big(\frac{1}{2}D(D+1)\big)^2$个独立分量中，我们可以通过坐标变换消去$\frac{1}{6}D^2(D+1)(D+2)$个分量。所以$B_{\mu\nu,\rho\sigma}$中真正能用以刻画$P$点曲率的只有

$$\big(\frac{1}{2}D(D+1)\big)^2 - \frac{1}{6}D^2(D+1)(D+2) = \frac{1}{12}D^2(D^2-1) \tag{1.30}$$

个。比方说，对于$D = 2$，我们得到刻画曲率的分量个数为1，正好是高斯曲率。但是，对于$D > 2$的高维空间，曲率必须用一个具有$\frac{1}{12}D^2(D^2-1)$个分量的量才能刻画。

找到这样一个量的具体公式相当具有挑战性，目前我们能利用的信息只有: 首先，这个公式必须包含度规的二阶导数(因为它来自于度规级数展开的二阶项$B_{\mu\nu,\rho\sigma}$)，其次，这个公式必须将无限多个局部平坦的坐标系拼接起来，使得结果不依赖于特定的坐标系。黎曼完成了这个困难的挑战性任务，得到的就是我们称之为黎曼曲率张量的一个量。