

目录

| | |
|-------------------|----------|
| 第七章 振动 | 2 |
| 7.1 小振动 | 2 |
| 7.1.1 小振动的拉格朗日量 | 2 |
| 7.1.2 简正坐标的存在性 | 3 |
| 7.1.3 如何寻找简正坐标 | 5 |
| 7.1.4 举例 | 8 |
| 7.2 参数共振 | 9 |
| 7.2.1 现象与问题 | 9 |
| 7.2.2 参数共振的一般性分析 | 9 |
| 7.2.3 单自由度系统的参数共振 | 14 |

第七章 振动

陈童

本章将研究两类振动问题，其一是力学系统在其稳定平衡位置附近的微小振动，其二是一个振动的力学系统在参数的周期性变化下发生的失稳现象，即所谓的参数共振。我们将主要使用拉格朗日框架分析小振动问题，而主要使用哈密顿力学框架分析参数共振问题。

7.1 小振动

对于一个处于稳定平衡状态的力学系统，给它一个小扰动，它就会在平衡位置附近来回振动，这就是小振动。正如我们即将证明的，小振动是可积的，而且只要合适地选取系统的广义坐标，小振动可以化简成 n 个独立谐振子的简谐振动， n 就是系统的自由度数。

7.1.1 小振动的拉格朗日量

为了研究小振动，我们假设系统的动能 T 具有如下一般形式，

$$T = \frac{1}{2} m_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b, \quad (7.1)$$

这里 q^a 为系统的广义坐标，式中的 $m_{ab}(q)$ 关于两个下标对称，即满足 $m_{ab}(q) = m_{ba}(q)$ ，而且我们使用了求和约定(后文也一样)。从而系统的拉格朗日量 L 可以写成

$$L = \frac{1}{2} m_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b - V(q), \quad (7.2)$$

$V(q)$ 表示势能。

不失一般性的, 我们假设 $q^a = 0$ 为系统的稳定平衡位置, 根据第一章中的相关讨论可以知道, 它也就是势能 $V(q)$ 的极小值位置。要研究的就是 $q^a = 0$ 附近的小振动, 为此可以将上面的拉格朗日量(7.2)在 $q = 0$ 处泰勒展开, 将展开量 q^a 看成小量, 进而保留到这个小量的二阶, 即有

$$L = \frac{1}{2}m_{ab}(0)\dot{q}^a\dot{q}^b - V(0) - \frac{\partial V}{\partial q^a}\Big|_{q=0}q^a - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial q^a\partial q^b}\Big|_{q=0}q^a q^b + \dots \quad (7.3)$$

在这个式子中, 首先, $V(0)$ 是一个常数, 对于拉格朗日量来说无关紧要, 因此可以忽略。其次, 动能一定大于等于零, 从而 $m_{ab}(0)$ 是一个对称的正定矩阵, 不妨简记作 m_{ab} , 当然这样写出来的是矩阵元形式, 相应的 $n \times n$ 矩阵可以记为 M 。再次, 由于 $q = 0$ 为平衡位置, 也就是势能的极值位置, 从而必有 $\frac{\partial V}{\partial q^a}\Big|_{q=0} = 0$ 。最后, 假设记 $\frac{\partial^2 V}{\partial q^a\partial q^b}\Big|_{q=0} = k_{ab}$, 则由于势能的这个极值是极小值, 所以 k_{ab} 也必定是对称正定矩阵, 同样这写的是矩阵元形式, 相应的矩阵记为 K 。综上所述, 我们就能将小振动的拉格朗日量近似成,

$$L = \frac{1}{2}m_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b - \frac{1}{2}k_{ab}q^a q^b \quad (7.4)$$

假设引入坐标列矢量 $\mathbf{q} = (q^1, q^2, \dots, q^n)^T$, T 代表矩阵转置, 则也可以将上述拉格朗日量写成

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T K \mathbf{q}. \quad (7.5)$$

7.1.2 简正坐标的存在性

这一小节我们将证明, 可以合适地选取广义坐标进而将小振动的拉格朗日量(7.4)和(7.5) 化简成 n 个独立简谐振子的拉格朗日量。

注意到(7.5)式中的矩阵 M, K 均是对称正定矩阵, 我们可以引用关于对称矩阵的一个引理。**引理: 任何实对称矩阵都可以正交变换为对角矩阵。**即, 对于任意实对称矩阵 B , 必定存在正交矩阵¹ R , 使得

$$B = R^T D R, \quad (7.6)$$

式中 D 是对角矩阵, 其各对角元就是对称矩阵 B 的各本征值, 如果 B 同时为正定矩阵, 那这些对角元必定都大于零。关于这个引理的证明, 请参阅线性代数教材。

¹所谓的正交矩阵 R , 即满足 $R^T R = R R^T = 1$ 的矩阵, 这里1表示单位矩阵。

推论: 对于任何正定的实对称矩阵 B , 必定存在可逆矩阵 C , 使得

$$B = C^T C. \quad (7.7)$$

证明非常简单, 只要根据上面的引理取 $C = D^{\frac{1}{2}}R$ 即可. 由于假定 B 正定, 所以对角矩阵 D 也正定, 从而可逆, 从而 C 的逆矩阵即是 $C^{-1} = R^T D^{-\frac{1}{2}}$.

下面我们将上述引理和推论应用于小振动的研究. 首先, 注意到(7.5)式中的 M 为正定对称矩阵, 从而根据上面的推论知, 必定存在可逆矩阵 C , 使得 $M = C^T C$, 进而可以将(7.5)式写成

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T C^T C \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T K \mathbf{q}. \quad (7.8)$$

下面引入新的广义坐标 \mathbf{q}' ,

$$\mathbf{q} = C^{-1} \mathbf{q}'. \quad (7.9)$$

从而即有

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}'^T \dot{\mathbf{q}}' - \frac{1}{2} \mathbf{q}'^T C^{-1T} K C^{-1} \mathbf{q}'. \quad (7.10)$$

很显然, 式中的 $C^{-1T} K C^{-1}$ 依然是正定对称矩阵, 不妨记 $C^{-1T} K C^{-1} = K'$, 则根据上面的引理, 必定存在正交矩阵 R , 使得 $K' = R^T D R$, 这里 D 为正定的对角矩阵. 从而(7.10)式可以写成

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}'^T \dot{\mathbf{q}}' - \frac{1}{2} \mathbf{q}'^T R^T D R \mathbf{q}'. \quad (7.11)$$

引入最终的广义坐标 $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)^T$,

$$\mathbf{Q} = R \mathbf{q}', \quad (7.12)$$

从而即有

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T D \mathbf{Q}. \quad (7.13)$$

最后将正定对角矩阵写成 $D = \text{diag}\{\omega_1^2, \dots, \omega_n^2\}$, 即可以得到

$$L = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} \left(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2 \right). \quad (7.14)$$

最后的这个表达式我们没有使用求和约定，很明显，这正是 n 个独立简谐振子的拉格朗日量， ω_α 就是这些谐振子的角频率。到此为止就完成了本节的证明。

值得说明的是，(7.14)式中的广义坐标 $Q_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n$ 就是所谓的简正坐标，角频率 ω_α 就是所谓的简正频率。

假设引入与简正坐标对应的广义动量 $P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \dot{Q}_\alpha$ ，则我们很容易通过勒让德变换得到与(7.14)式相应的哈密顿量，为

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} (P_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2). \quad (7.15)$$

很显然，这个系统存在 n 个相互泊松对易的守恒量，为 $H_{\alpha} = \frac{1}{2} (P_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2)$ ， $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ，从而这就是一个可积系统。但(7.15)式不过是小振动问题在合适正则变量下的表述形式，从而这也就证明小振动是可积的。

7.1.3 如何寻找简正坐标

上一小节只是证明了简正坐标的存在性，那里的方法并不是我们实际寻找简正坐标的方法。为了实际寻找简正坐标，我们回到最初的小振动拉格朗日量(7.4)和(7.5)。从(7.4)式利用拉格朗日方程，可以得到一组关于 $q^a(t)$ 的运动微分方程，

$$m_{ab} \ddot{q}^b + k_{ab} q^b = 0. \quad (7.16)$$

写成矩阵形式，即

$$M \ddot{\mathbf{q}} + K \mathbf{q} = 0. \quad (7.17)$$

我们知道，简正坐标总是在做简单的简谐振动，因此为了寻找简正坐标，我们试着寻求方程(7.17)形如下式的解

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a} \cos(\omega t + \varphi), \quad (7.18)$$

式中常数 \mathbf{a} 为一个 n 维列矢量。

将(7.18)式代入(7.17)式即可得到

$$(-\omega^2 M + K) \mathbf{a} = 0. \quad (7.19)$$

这是一个关于列矢量 \mathbf{a} 的线性方程组，这个方程组存在非零解的充要条件是矩阵 $(-\omega^2 M + K)$ 不可逆，也就是说，它的行列式要等于零，从而可得 ω^2 需满足的方程，即

$$\det(-\omega^2 M + K) = 0. \quad (7.20)$$

这个方程有 n 个解，不妨记为 $\omega_\alpha^2, \alpha = 1, 2, \dots, n$ 。与 ω_α^2 对应的列矢量 \mathbf{a} 我们记作 $\mathbf{a}_{(\alpha)}$ ，即

$$(-\omega_\alpha^2 M + K)\mathbf{a}_{(\alpha)} = 0. \quad (7.21)$$

可以证明 ω_α^2 一定大于零(从而 ω_α 都是实数)，证明如下：我们用行矢量 $\mathbf{a}_{(\alpha)}^T$ 从左边乘到方程(7.21)上，进而即可得

$$\omega_\alpha^2 = \frac{\mathbf{a}_{(\alpha)}^T K \mathbf{a}_{(\alpha)}}{\mathbf{a}_{(\alpha)}^T M \mathbf{a}_{(\alpha)}}, \quad (7.22)$$

注意到 K 和 M 均为对称正定矩阵，即 $\mathbf{a}_{(\alpha)}^T K \mathbf{a}_{(\alpha)} > 0, \mathbf{a}_{(\alpha)}^T M \mathbf{a}_{(\alpha)} > 0$ ，从而即可得

$$\omega_\alpha^2 > 0. \quad (7.23)$$

证明完成。

为了简化分析，下面进一步假设 n 个 ω_α^2 两两不同。由此即可证明

$$\mathbf{a}_{(\beta)}^T M \mathbf{a}_{(\alpha)} = 0, \quad \text{for any } \alpha \neq \beta. \quad (7.24)$$

为了证明这个结论，我们将方程(7.21)转置一下(注意 M 和 K 均为对称矩阵)，得到

$$-\omega_{(\beta)}^2 \mathbf{a}_{(\beta)}^T M + \mathbf{a}_{(\beta)}^T K = 0. \quad (7.25)$$

下面用 $\mathbf{a}_{(\beta)}^T$ 左乘(7.21)式，用 $\mathbf{a}_{(\alpha)}$ 右乘(7.25)式，然后将这两个结果相减，即可得

$$(\omega_{(\beta)}^2 - \omega_{(\alpha)}^2) \mathbf{a}_{(\beta)}^T M \mathbf{a}_{(\alpha)} = 0. \quad (7.26)$$

很明显，若 $\alpha \neq \beta$ ，即有(7.24)式。进一步若记 $\mathbf{a}_{(\alpha)}^T M \mathbf{a}_{(\alpha)} = m_\alpha$ ，则我们也可以将最终的结果写成如下形式

$$\mathbf{a}_{(\beta)}^T M \mathbf{a}_{(\alpha)} = m_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \quad (7.27)$$

式中的 $\delta_{\alpha\beta}$ 就是所谓的克龙内克符号。利用这个结果,再将 $\mathbf{a}_{(\beta)}^T$ 左乘(7.21)式,又可以得到

$$\mathbf{a}_{(\beta)}^T K \mathbf{a}_{(\alpha)} = m_\alpha \omega_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}. \quad (7.28)$$

下面我们引入新的广义坐标 $Q_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n$, 其定义为

$$\mathbf{q} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{a}_{(\alpha)} Q_\alpha. \quad (7.29)$$

将这个式子代入小振动拉格朗日量(7.5)中, 并利用关系式(7.27)和(7.28), 即可以得到

$$L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \left(m_\alpha \dot{Q}_\alpha^2 - m_\alpha \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2 \right) \quad (7.30)$$

这正是 n 个独立谐振子的拉格朗日量。这就说明, 新的广义坐标 $Q_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n$ 其实就是简正坐标。当然, (7.30)式和上一小节定义简正坐标时标准的(7.14)式还略微有些区别, 但这个区别其实无关紧要, 因为人们很容易通过将 $\sqrt{m_\alpha} Q_\alpha$ 重新定义为 Q_α , 进而将(7.30)式变为标准的(7.14)式。

简正坐标作简谐振动, 从而 $Q_\alpha(t) = c_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)$, 这种运动也称为**简正模式**, 相应的振动频率 ω_α 就称为**简正频率**。进而可以由(7.29)式得到原坐标 $\mathbf{q}(t)$ 的运动,

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{a}_{(\alpha)} c_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha). \quad (7.31)$$

我们可以将列矢量 $\mathbf{a}_{(\alpha)}$ 的各分量记为 $a_{(\alpha)}^i, i = 1, 2, \dots, n$, 进而将 $a_{(\alpha)}^i$ 看成某个 $n \times n$ 矩阵 A 的第 i 行第 α 列, 即 $A = (a_{(\alpha)}^i)$, A 通常称为模态矩阵(modal matrix)。如此一来就可以将简正坐标的式子(7.29)重写成

$$\mathbf{q} = A\mathbf{Q}, \quad (7.32)$$

式中 $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)^T$ 为简正坐标的列矢量。反过来也有

$$\mathbf{Q} = A^{-1}\mathbf{q}. \quad (7.33)$$

7.1.4 举例

双摆

第二章最后介绍过双摆，其拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)gl_1 \cos(\theta_1) + m_2gl_2 \cos(\theta_2). \quad (7.34)$$

下面我们简化一下问题，设 $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$ ，从而双摆的拉格朗日量可以简化为

$$L = ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2mgl \cos \theta_1 + mgl \cos \theta_2 \quad (7.35)$$

显然， $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 为系统的稳定平衡位置。为了研究小振动，我们在这个平衡位置附近将上述拉格朗日量对小量 θ_1, θ_2 泰勒展开到二阶，即有

$$L = ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - mgl\theta_1^2 - \frac{1}{2}mgl\theta_2^2. \quad (7.36)$$

利用拉格朗日方程即可以得到小振动的运动微分方程

$$\begin{aligned} 2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 + 2mgl\theta_1 &= 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + ml^2\ddot{\theta}_1 + mgl\theta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.37)$$

引入广义坐标列矢量 $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T$ ，就可以将这组方程写成

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \theta = 0. \quad (7.38)$$

为了找到简正坐标和简正模式，我们需要求解相应的本征方程

$$\left[-\omega^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{g}{l} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \mathbf{a} = 0. \quad (7.39)$$

解得一组解为 $\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})(\frac{g}{l})$ ，相应的 $\mathbf{a}_{(1)} = (1, \sqrt{2})^T$ ，另一组解为 $\omega_2^2 = (2 + \sqrt{2})(\frac{g}{l})$ ，相应的 $\mathbf{a}_{(2)} = (1, -\sqrt{2})^T$ 。从而可以得到模态矩阵 A ，为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

从而简正坐标为

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}. \quad (7.41)$$

当然那个整体的 $\frac{1}{2}$ 因子并不重要。

7.2 参数共振

7.2.1 现象与问题

参数共振就是通过周期性地改变系统的参数而产生的共振现象。日常生活中人们在荡秋千时可以观察到这种现象。如图(7.1)所示,荡秋千的人可以通过适时地作出下蹲和起立的动作来把秋千荡得越来越高。具体来说,每次秋千摆到最高位置时,人要迅速蹲下,使重心降低,如图(7.1)中的第1,3幅图,而秋千通过平衡位置时,人又要迅速起立,使重心升高,如图(7.1)中的第2幅图。这样,秋千来回荡一次,整个系统的重心就呈周期性地上升和下降两次,系统重心的运动轨迹可以绘成图(7.1)中的最后一幅图。

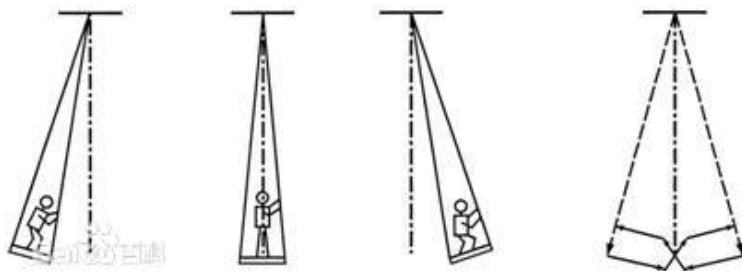


图 7.1: 荡秋千时的参数共振。图片来自网络。

很显然,重心的位置决定的是秋千的有效摆长,假设记秋千的固有频率 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$,则上述过程相当于以 $2\omega_0$ 的频率周期性改变秋千的有效摆长 l 。问题是,这种共振是如何发生的呢?特别是,为什么人的蹲起频率得是秋千频率的两倍呢?另外,秋千基本上是单自由度的力学系统,多自由度力学系统有没有参数共振现象呢?

7.2.2 参数共振的一般性分析

为了一般性地分析参数共振现象,我们考察一个 n 自由度系统,以列矢量 \mathbf{x} 表示其相空间坐标, $\mathbf{x} = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)^T$, T 表示矩阵转置,并笼统地以 $x^i, i = 1, 2, \dots, 2n$ 表示 \mathbf{x} 的各个分量。假设系统的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2} B_{ij} x^i x^j = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}, \quad (7.42)$$

式中系统的参数 B_{ij} 构成一个 $2n \times 2n$ 的对称矩阵, 记为 \mathbf{B} 。由于能量总大于零, 即 $H > 0$, 因此一般来说我们要求 \mathbf{B} 是一个正定矩阵。进一步假设这些参数依赖于时间并按照周期 T 变化, 即

$$B_{ij}(t+T) = B_{ij}(t), \quad (7.43)$$

或者也可以写作 $\mathbf{B}(t+T) = \mathbf{B}(t)$ 。这类系统的最简单例子就是一个频率周期性变化的谐振子, 这时候 $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$, $\omega^2(t+T) = \omega^2(t)$ 。

上述系统的哈密顿正则方程为

$$\dot{x}^i = \omega^{ij} \partial_j H = \omega^{ij} B_{jk}(t) x^k. \quad (7.44)$$

数学家弗洛凯最早研究了这类参数随时间周期性变化的一阶微分方程组, 这就是所谓的弗洛凯理论(Floquet theory)。我们注意到, 对于这类方程, 若 $x^i(t)$ 为其解, 则 $x^i(t) = x^i(t+T)$ 同样为其解。由于这是一组一阶线性微分方程, 它的解空间必定为一个线性空间, 因此这就意味着, $x^i(t+T)$ 必定为 $x^i(t)$ 的线性变换, 即必定存在矩阵 S^i_j 使得

$$x^i(t+T) = S^i_j x^j(t). \quad (7.45)$$

进一步, 由于方程(7.44)是一个哈密顿正则方程, 从而根据第五章的知识可以知道, $x^i(t)$ 的时间演化本身是正则变换, 从而 $x^i(t+T)$ 与 $x^i(t)$ 之间的线性变换**必定同时是正则变换**。

记矩阵 S 的第 i 行第 j 列为 S^i_j , 那么怎么算出变换矩阵 S 呢? 方法之一是在 $t = 0$ 时刻取方程(7.44) $2n$ 个线性无关的初始条件 $x^i_{(j)}(0), j = 1, 2, \dots, 2n$ 为

$$x^i_{(j)}(0) = \delta^i_j, \quad (7.46)$$

然后解出它们演化到 T 时刻的值 $x^i_{(j)}(T)$, 则由于

$$x^i_{(j)}(T) = S^i_k x^k_{(j)}(0) = S^i_j, \quad (7.47)$$

因此这组 T 时刻的值正好给出矩阵 S^i_j 。

矩阵 S 的重要性在于, 它决定了方程(7.44)解的长时间行为。这是因为, 根据(7.45)我们有

$$\mathbf{x}(t+T) = S\mathbf{x}(t) \Rightarrow \mathbf{x}(NT) = S^N \mathbf{x}(0), \quad (7.48)$$

很显然, 只要取足够大的 N 就能从上式得到解的长时间行为。实际上, 对于一个一般性的解, 其长时行为取决于矩阵 S 模长最大的本征值²。为了看清楚这个结论, 我们记 S 的 $2n$ 个本征值为 $\lambda_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, 2n$, 相应的本征矢量为 a_α^i , 不妨假设 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{2n}|$ 。现在将解 $\mathbf{x}(t)$ 在 $t = 0$ 时刻的初始值 $\mathbf{x}(0)$ 展开为 $2n$ 个本征矢量 a_α^i 的线性组合, 即 $x^i(0) = \sum_\alpha c_\alpha a_\alpha^i$, 则有

$$\mathbf{x}(NT) = S^N \mathbf{x}(0) \Rightarrow x^i(NT) = \sum_\alpha c_\alpha \lambda_\alpha^N a_\alpha^i. \quad (7.49)$$

很显然, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 必有

$$x^i(NT) = \sum_\alpha c_\alpha \lambda_\alpha^N a_\alpha^i \rightarrow c_1 \lambda_1^N a_1^i + \dots, \quad (7.50)$$

从而矩阵 S 模长最大的本征值 λ_1 和相应的本征矢量决定了方程(7.44)解的长时间行为。

特别的, 如果模长最大的本征值 λ_1 满足 $|\lambda_1| > 1$, 则 $|\lambda_1^N|$ 在 $N \rightarrow \infty$ 时将随着 N 指数增长, 从而方程(7.44)的一般解将在长时间上随时间指数增长, 我们称这样的解为不稳定解, 称相应的系统为不稳定系统。反之, 如果 $|\lambda_1| \leq 1$, 则方程(7.44)的任何解都不会随着时间指数增长, 我们称这些解为稳定解, 称这样的系统为稳定系统。**所谓的参数共振, 就是指那些在参数的周期性变化下不稳定的系统。尤其我们要研究什么情况下一个没有发生参数共振的稳定系统, 在参数扰动之下产生参数共振, 变成不稳定系统的现象。** 具体来说, 就是要研究在什么情形下, 一个由哈密顿量(7.42)描述的稳定系统, 在给参数 $B_{ij}(t)$ 加上某种保持周期 T 不变的小扰动后, 会产生参数共振变成不稳定系统。由于参数的保周期小扰动仅仅只能对矩阵 S 产生微扰, 不会使得 $|\lambda_1| < 1$ 突变到 $|\lambda_1| > 1$, 因此很显然这种使得稳定系统失稳的情形, 只可能发生在扰动最大模长本征值 $|\lambda_1| = 1$ 的系统时。

另一方面, 由于线性变换(7.45)同时是正则变换, 而正则变换必须保持辛结构, 即满足

$$\omega_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^j}{\partial x^n} = \omega_{mn}, \quad (7.51)$$

从而即可以得到

$$\omega_{ij} S^i_m S^j_n = \omega_{mn} \Leftrightarrow S^T J S = J, \quad (7.52)$$

²为简单起见, 我们假设矩阵 S 可以对角化。

满足这个式子的矩阵 S 就称作辛矩阵。由于辛矩阵 S 是 $x^i(t+T)$ 与 $x^i(t)$ 之间的正则变换的雅可比矩阵, 根据第五章证明刘维尔定理时得到的附带结果可以知道, 它的行列式必为1, 即

$$\det(S) = 1. \quad (7.53)$$

另外, 根据第五章中矩阵 J 的定义式也容易直接算得

$$\det(J) = 1. \quad (7.54)$$

为了研究何时会发生参数共振, 有必要研究一下辛矩阵的本征值集合(称为本征谱)有什么特点。为此我们考察辛矩阵 S 的特征多项式 $p(\lambda) = \det(S - \lambda \cdot 1)$, 式中 1 表示单位矩阵。由(7.52)式以及 $J^2 = -1$ (根据定义直接验证)可得, $S = -JS^{T-1}J$, 从而

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(S - \lambda \cdot 1) = \det(-JS^{T-1}J + J\lambda J) \\ &= \det(-S^{T-1} + \lambda \cdot 1) = \det(-1 + \lambda S) \\ &= \lambda^{2n} \det\left(S - \frac{1}{\lambda} \cdot 1\right) = \lambda^{2n} p(1/\lambda). \end{aligned} \quad (7.55)$$

上述推导中应用了 $\det(S) = \det(J) = 1$, 以及 $\det(A^T) = \det(A)$ 这些事实。由推导的结果可知, 若 $p(\lambda) = 0$ 则必有 $p(1/\lambda) = 0$, 反之亦然。这就说明, S 的本征值成对出现, 若 λ 为本征值, 则 $1/\lambda$ 也必定为本征值。另外, S 为一实矩阵, 因此若 λ 为本征值, 则 $\bar{\lambda}$ 也必为其本征值, 这里 $\bar{\lambda}$ 表示 λ 的复数共轭。

因此, 矩阵 S 的本征值必定四个一组地出现, 分别为

$$\lambda, \bar{\lambda}, 1/\lambda, 1/\bar{\lambda}. \quad (7.56)$$

在复平面上, 这四个本征值关于实轴和关于单位圆周均对称³, 如图(7.2)所示。但是本征值分布在单位圆周上的情形例外, 这时候由于 $\lambda = 1/\bar{\lambda}, \bar{\lambda} = 1/\lambda$, 所以本征值实际上是两个一对出现, 而没有四个一组, 这一对为 $\lambda, \bar{\lambda}$ 。同样, 本征值分布在实轴上的情形也例外, 这时候本征值也只成对, 为 $\lambda, 1/\lambda$ 。具体分布情形如图(7.2)所示。

但是根据前面关于系统稳定性的讨论可以知道, S 的本征值中只要有一个不在单位圆周上, 则系统必定不稳定。为了看清楚这一点, 不妨设

³所谓关于单位圆周对称是指 λ 和 $1/\bar{\lambda}$ 成对出现。

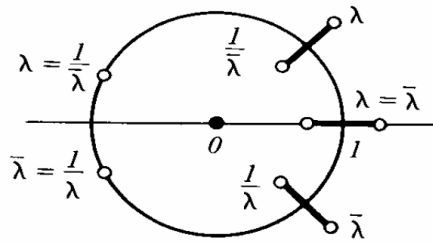


图 7.2: 辛矩阵的本征值分布。图片来自阿诺德《经典力学的数学方法》

本征值 λ 不在单位圆周上, 则很显然, 本征值 λ 和 $1/\lambda$ 中必定有一个落在圆外, 另一个落在圆内, 落在圆外的那个本征值模长当然大于1, 从而这就说明, 最大模长本征值的模长必定大于1, 从而系统必定不稳定。这也说明, 对于稳定系统, 其 S 的本征值必定全都分布在单位圆周之上。

定理: 若矩阵 S 的 $2n$ 个本征值各不相同, 而且都分布在单位圆周上, 则系统必定稳定, 而且在对参数的保持周期 T 不变的小扰动下也依然保持稳定。

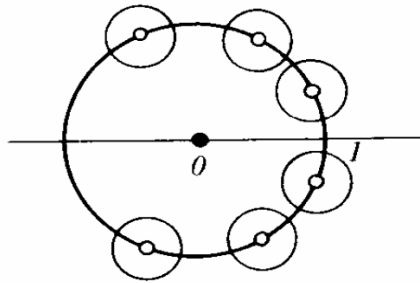


图 7.3: 稳定的本征值分布。图片来自阿诺德《经典力学的数学方法》

证明: 首先, 单位圆周上的本征值当然满足模长等于1, 从而系统必定稳定, 真正需要证明的是它在对参数的扰动下依然保持稳定。具体证明如下, 如图(7.3)所示, 由于 $2n$ 个本征值各不相同, 所以我们可以把它们分别包含在 $2n$ 个不相交的邻域内, 且让这些邻域关于单位圆周和实轴均对称。现在, 设想对系统的参数进行一个保周期 T 的微扰, 从而相当于将矩阵 S 作一个微扰, 变为 S' 。很显然, 只要扰动足够小, 则 S' 的本征值必定依然分布在那 $2n$ 个不相交邻域内。实际上 S' 的所有本征值必定依然分布在单位圆

周上。因为否则，假设有一个本征值 λ 不在单位圆周上，例如位于圆外，则根据上面关于辛矩阵本征值分布的讨论可以知道，必定还有一个成对的本征值 $1/\bar{\lambda}$ 位于同一邻域的圆内部分。这样，这个邻域内扰动之前的一个本征值在扰动之后就变成了两个，这就意味着 S' 的不同本征值数大于 $2n$ 。但这是不可能的，因为 S' 依然为 $2n \times 2n$ 矩阵，它最多只能有 $2n$ 个不同本征值。这就证明了 S' 的所有本征值必定分布在单位圆周之上，从而对参数进行扰动之后系统依然保持稳定！这就完成了证明。

上面的定理说明，当我们扰动稳定系统的参数时，相应矩阵 S 的本征值只有在撞上另一个本征值时才可能成对地离开单位圆周（如图(7.4)），当然，这时与这一对本征值复共轭的本征值对也同时相撞并成对离开单位圆周。这时候就会使得原来稳定的系统产生参数共振，变成不稳定系统。

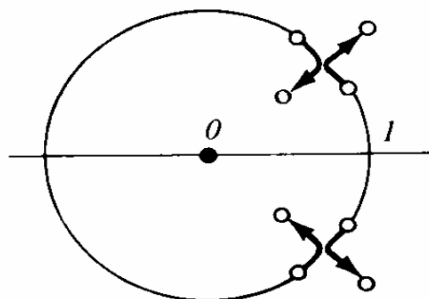


图 7.4: 本征值相撞离开单位圆周。图片来自阿诺德《经典力学的数学方法》

7.2.3 单自由度系统的参数共振

这一小节我们将对 $n = 1$ 的单自由度系统的参数共振进行更细致的分析。待分析的系统为一个频率参数周期性变化的谐振子，其哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}[p^2 + \omega^2(t)q^2], \quad (7.57)$$

其中角频率参数 $\omega(t)$ 满足 $\omega^2(t + T) = \omega^2(t)$ ， T 为参数变化的周期，我们记 $\omega_p = \frac{2\pi}{T}$ 为参数变化的角频率。很显然，这个系统的相空间为2维，相空间坐标 $\mathbf{x} = (q, p)^T$ ，因此矩阵 S 是一个 2×2 矩阵。系统的哈密顿正则方程为

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega(t)q. \quad (7.58)$$

这个方程就是一个变频谐振子的微分方程。为了求出矩阵 S ，我们取两个线性无关的初始值 $\mathbf{x}_{(1)}(0) = (1, 0)^T$ ， $\mathbf{x}_{(2)}(0) = (0, 1)^T$ ，进而根据(7.47)式，矩阵 S 由下式给出

$$S = \begin{pmatrix} x_{(1)}^1(T) & x_{(2)}^1(T) \\ x_{(1)}^2(T) & x_{(2)}^2(T) \end{pmatrix}. \quad (7.59)$$

由于这里 S 为 2×2 矩阵，所以它只有两个本征值 λ_1, λ_2 ，根据上一小节的分析，这两个本征值必定构成一对。由于不能够凑成四个一组，所以这一对本征值的分布只有两种可能性，要么关于实轴对称地(即互为复共轭)分布在单位圆周上，要么关于单位圆周对称地分布在实轴上，如图(7.5)所示。当这一对本征值分布在实轴上时，我们有

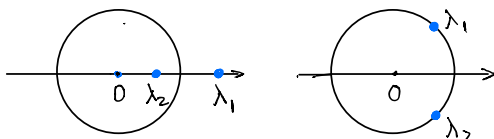


图 7.5: 单自由度系统 S 矩阵本征值分布。

$$|\text{Tr}(S)| = |\lambda_1 + \lambda_2| = \left| \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right| > 2, \quad (7.60)$$

式中 $\text{Tr}(S)$ 表示矩阵 S 的迹。根据上一小节的一般性分析，这时候系统不稳定，有参数共振。当这一对本征值分布在单位圆周上时，我们可以记 $\lambda_1 = e^{i\alpha}$ ，则 $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = e^{-i\alpha}$ ，则

$$|\text{Tr}(S)| = |\lambda_1 + \lambda_2| = |e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}| = 2|\cos \alpha| \leq 2, \quad (7.61)$$

根据上一小节的分析，这时候系统是稳定的。而且，当 $e^{i\alpha} \neq e^{-i\alpha}$ 时，即 $|\text{Tr}(S)| < 2$ 时，由于两个本征值不同，所以根据上一小节的分析，系统在参数的保持周期 T 不变的扰动下将依然保持稳定，从而即使在扰动之下也不会产生参数共振。稳定系统在扰动之下失稳的情形发生在 $e^{i\alpha} = e^{-i\alpha}$ 时，即发生在 $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ 的两本征值碰撞时，很显然这等价于

$$|\text{Tr}(S)| = 2. \quad (7.62)$$

失稳就发生在将这种临界系统的本征值扰动到脱离单位圆周时。

为了分析得更具体一些，我们不妨假设(7.57)式给出的哈密顿量中的 $\omega^2(t)$ 为

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 [1 + \epsilon \cos(\omega_p t)], \quad (7.63)$$

式中 $\omega_p = \frac{2\pi}{T}$ 为 $\omega^2(t)$ 变化的角频率。并且假设我们仅仅只考察通过变动 ω_0 和 ϵ 的方式扰动 $\omega^2(t)$ 。我们可以在 $\omega_0 - \epsilon$ 平面上示意性地画出 $|\text{Tr}(S)| < 2$ 和 $|\text{Tr}(S)| > 2$ 的区域，也就是系统的稳定区和不稳定区(也就是参数共振的区域)，如图(7.6)所示。两个区域的交界线就表示 $|\text{Tr}(S)| = 2$ 的临界系统。

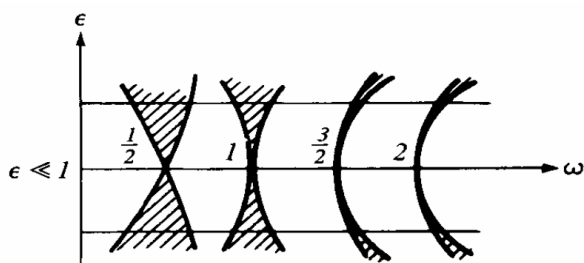


图 7.6: $\omega_0 - \epsilon$ 平面上的稳定区和参数共振区。阴影部分表示参数共振区。图中横坐标实际上应该是 ω_0/ω_p , ω_p 是固定的。图片来自阿诺德《经典力学的数学方法》。

从图(7.6)中我们看到，整个水平轴都是一些被临界点隔开的稳定区域。这实际上是这么确定的：首先，我们在(7.63)式中取 $\epsilon = 0$ (对应水平轴)。这时候要求解的哈密顿正则方程就是

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega_0 q. \quad (7.64)$$

其通解为

$$\begin{aligned} q(t) &= c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) \\ p(t) &= -c_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + c_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (7.65)$$

对于初值 $\mathbf{x}_{(1)}(0) = (1, 0)^T$ ，容易解出

$$\mathbf{x}_{(1)}(T) = (\cos(2\pi\omega_0/\omega_p), -\omega_0 \sin(2\pi\omega_0/\omega_p))^T. \quad (7.66)$$

对于初值 $\mathbf{x}_{(2)}(0) = (0, 1)^T$, 容易解出

$$\mathbf{x}_{(2)}(T) = \left(\sin(2\pi\omega_0/\omega_p)/\omega_0, \cos(2\pi\omega_0/\omega_p) \right)^T. \quad (7.67)$$

从而矩阵 S 为

$$S = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega_0/\omega_p) & \frac{1}{\omega_0} \sin(2\pi\omega_0/\omega_p) \\ -\omega_0 \sin(2\pi\omega_0/\omega_p) & \cos(2\pi\omega_0/\omega_p) \end{pmatrix}. \quad (7.68)$$

进而可以得到

$$|\mathrm{Tr}(S)| = 2|\cos(2\pi\omega_0/\omega_p)| \leq 2. \quad (7.69)$$

可见, $\omega_0 - \epsilon$ 平面的水平轴上只有稳定区域, 而 $|\mathrm{Tr}(S)| = 2$ 的临界点满足

$$\omega_0/\omega_p = \frac{k}{2}. \quad (7.70)$$

式中 k 为正整数。特别的, $\omega_p = 2\omega_0$ 为最简单的临界点, 这时候只要稍微扰动 ϵ 就会产生参数共振。这正好解释了本节一开始提出的问题, 即, 为什么荡秋千时要以 $2\omega_0$ 的频率变化摆长才能产生参数共振。

关于参数共振, 我们就讲到这里, 更多的计算例子请参阅阿诺德《经典力学的数学方法》。