重整化群（三）：重整化群方程

陈童

前面我们讲过，重整化变换的实质在于积去小尺度短程自由度。有时候我们也将这样的操作说成是从物理上忽视短程自由度，它有点像我们给一副图片打码赛克，使得图片的某些细节被忽视。物理上系统地进行这种操作的办法是将“图片”进行缩放，即rescaling。我们总可以通过将“图片”不断缩小，从而把打码的像素缩小成基本像素单位，进而看到整幅图片越来越宏观的结构。在重整化变换中即是，我们总可以通过不断rescaling(即缩小), 从而把浮动的截断尺度a化约为1个基本单位，从而得到大尺度的有效理论，当然，这么做的代价是会引入放大倍率e^{-t}(即缩小)(本节的t和上一节的t毫无关系)。这一节我们就来研究，系统的关联函数如何随着这个缩放倍率的变化而变化，这就叫做重整化群方程。

假设我们考察的量子场论系统有一组局域的可观测量算符$\mathcal{O}_i(x)$，它们的scaling 量纲分别为Δ_i, 当我们将这个量子场论系统放大e^{-t}倍时(即缩小)，$\mathcal{O}_i(x)$将变为$\mathcal{O}'_i(x)$, 由于缩小系统会使得能量密度更大，所以我们应该有如下算符混合关系，

$$\mathcal{O}_i(x) \simeq e^{-t\Delta_i}\mathcal{O}'_i(e^{-t}x). \tag{1}$$

等价地，我们也可以将这个方程写成

$$\mathcal{O}_i(e^t x) \simeq e^{-t\Delta_i}\mathcal{O}'_i(x). \tag{2}$$

这里我们没有写等于号，而是用的$\simeq$号，这是因为定义加撇算符的理论和定义不加撇算符的理论其实不是一回事，两者之间相差一个重整化，下面我们会进一步澄清这一点。

对于一个量子场论而言，假设基本场变量为ϕ，欧氏作用量为S, 那么量子场论的关键在于计算泛函积分$\int[\mathcal{D}\phi]e^{-S}$, 比方说，在计算关联函数时，我们就是要计算这样的泛函积分。因此，一个关键的问题是，当我们将量子场论系统放大e^{-t}倍时，这个泛函积分会怎么变？换言之，我们得搞清楚理论本身如何重整化。

这里出现一个关键的问题，即实际上，当我们说把量子场论系统放大e^{-t}倍(即缩小)时，我们实际在物理上并不能真正做到这一点，我们实际上做的只是离这个系统远一点，在更远的地方来观测这个系统从而使得自己能够忽略一些小尺度细节而已。换句话来说，我们实际上是在用一把更大的尺子来衡量这个系统。或者说**在重整化过程中，系统中各点的物理距离是不变的，将坐标距离放大e^{-t}倍（即缩小）必然同时要将尺子放大e^{t}倍。** 物理系统的尺子就反映为度规张量，所以，将量子场论系统的坐标距离放大e^{-t}倍必然同时要将度规张量g放大e^{2t}倍，即同时进行如下变换

$$\mathrm{g} \to e^{2t}\mathrm{g}. \tag{3}$$

式中g为度规张量，其用指标写出来的分量形式为g_{ab}。

根据上面的分析我们就能写出关联函数的基本缩放（重整化）方程

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{O}_1(e^t x_1)\mathcal{O}_2(e^t x_2)....\mathcal{O}_n(e^t x_n)\rangle_{\mathrm{g}} \\ = \ & e^{-\left(\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n\right)t}\langle \mathcal{O}'_1(x_1)\mathcal{O}'_2(x_2)....\mathcal{O}'_n(x_n)\rangle_{e^{2t}\mathrm{g}}. \end{aligned} \tag{4}$$

$\langle ...\rangle_{\mathrm{g}}$表示计算相应的泛函积分时，作用量中的时空度规取作g，也即是说，$\langle ...\rangle_{\mathrm{g}}$意味着理论是定义在度规为g的黎曼流形上。注意，与度规e^{2t}g对应的算子都是加撇的，因为根据以上所说，算子加撇和度规放大为e^{2t}g是同步的，两者一起就是所谓的重整化变换。下面我们就是要从这个方程(4)出发，得到关联函数在缩放下满足的关于t的微分方程。

首先我们注意到，在经典物理的层次上，对于欧氏作用量S，它在度规变动δg_{ab}下满足$\delta S = -\int_M \frac{1}{2}T^{ab}\delta g_{ab}$, T^{ab}就是经典的能动量张量[1], $\int_M$表示在时空流形上积分。我们关心的度规无穷小变动是度规$e^{2t}g_{ab}$在t作无穷小改变时引起的，这时候在经典物理的层次上必有$\delta_t S = \frac{\partial S}{\partial t} = -\int_M T^a_a(t)$, $T^a_a(t)$表示定义在度规$e^{2t}g_{ab}$上的能动量张量的缩并。为此，我们可以假设在量子的层次上，在t做无穷小变动时，作用量和泛函积分测度$[\mathcal{D}\phi]e^{-S}$的变动为

$$\int_M \mathrm{T}'(t), \tag{5}$$

式中$\mathrm{T}'(t)$为前面$T^a_a(t)$的量子版本，是一个算符。

[1]这个结果的正负号不用死记，取一个标量场论算一下就知道了。

根据上一段的分析我们容易知道，当我们将方程(4)中的t作无穷小变动时，必有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\langle\mathcal{O}_1(e^t x_1)\mathcal{O}_2(e^t x_2)....\mathcal{O}_n(e^t x_n)\rangle_{\mathrm{g}} \\ = & -\big(\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n\big)\langle\mathcal{O}_1(e^t x_1)\mathcal{O}_2(e^t x_2)....\mathcal{O}_n(e^t x_n)\rangle_{\mathrm{g}} \\ + & \ e^{-\big(\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n\big)t}\langle\mathcal{O}'_1(x_1)\mathcal{O}'_2(x_2)....\mathcal{O}'_n(x_n)\int_M \mathrm{T}'(t)\rangle_{e^{2t}\mathrm{g}}. \end{aligned} \tag{6}$$

下面假设$\int_M \mathrm{T}'(t)$可以用局域算子$\mathcal{O}'_i$展开成

$$\int_M \mathrm{T}'(t)={\sum_i}'\int_M \beta^i(\lambda)\mathcal{O}'_i(x), \tag{7}$$

求和号中的$'$号表示我们仅仅对scaling 量纲小于等于时空维数d的算子求和，因为能动量张量的scaling 量纲不能超过d。另一方面，我们也可以将度规e^{2t}g上的有效作用量用局域算子展开为

$$S={\sum_i}'\lambda^i\int_M \mathcal{O}'_i(x). \tag{8}$$

同样，由于我们关心的是长程物理, 所以我们仅仅只需要关心相关算子，或者说可重整项。上式中的λ^i是一个一般性的记号，它包括相互作用耦合常数以及质量等等参数。由此我们可以知道，方程(6)可以重写成

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\langle\mathcal{O}_1(e^t x_1)\mathcal{O}_2(e^t x_2)....\mathcal{O}_n(e^t x_n)\rangle_{\mathrm{g}} \\ = & -\big(\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n\big)\langle\mathcal{O}_1(e^t x_1)\mathcal{O}_2(e^t x_2)....\mathcal{O}_n(e^t x_n)\rangle_{\mathrm{g}} \\ & -e^{-\big(\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n\big)t}{\sum_i}'\beta^i(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda^i}\langle\mathcal{O}'_1(x_1)\mathcal{O}'_2(x_2)....\mathcal{O}'_n(x_n)\rangle_{e^{2t}\mathrm{g}}. \end{aligned} \tag{9}$$

将加撇算符变回不加撇算符，简单整理一下即有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\langle\mathcal{O}_1(e^t x_1)\mathcal{O}_2(e^t x_2)....\mathcal{O}_n(e^t x_n)\rangle_{\mathrm{g}} \\ = & -\big(\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n\big)\langle\mathcal{O}_1(e^t x_1)\mathcal{O}_2(e^t x_2)....\mathcal{O}_n(e^t x_n)\rangle_{\mathrm{g}} \\ & -{\sum_i}'\beta^i(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda^i}\langle\mathcal{O}_1(e^t x_1)\mathcal{O}_2(e^t x_2)....\mathcal{O}_n(e^t x_n)\rangle_{\mathrm{g}}. \end{aligned} \tag{10}$$

这就是我们要推导的**重整化群方程**。

如果不用度规的办法进行重整化，而像前面两节一样认为重整化就是调节耦合常数λ^i，因此它是一个依赖于t的$\lambda^i(t)$，则我们还有

$$\frac{d\lambda^i}{dt} = -\beta^i(\lambda). \tag{11}$$

可见，$\beta^i(\lambda)$就是通常所说的Beta函数。只不过我们这里的t是对长度尺度的放大倍率，而不是对能量尺度的放大倍率，所以Beta函数的方程(11)多了一个负号。

参考文献：Joseph Polchinski, String Theory Volume II, Superstring Theory and Beyond. Chapter 15 Advanced CFT。本节内容是对Polchinski 这一章的相关论述的发展，在文献中很可能找不到和我们这里一样的内容。