

# 概率论、费曼图以及随机矩阵理论（二）：扰动高斯分布与费曼图

陈童

我们将考察两种很有用的随机变量，第一种是满足高斯分布的随机变量，第二种随机变量的分布函数是对高斯分布的一个扰动。我们关心的要点是，在这两种情况下我们如何计算 $n$ 极矩以及累积量(cumulants)，也就是我们所谓的集团 $n$ 极矩。我们将从高斯分布开始，但是我们更关心的其实是扰动高斯分布，这时候我们将发展一种画图的办法来计算 $n$ 极矩以及集团 $n$ 极矩的微扰展开。这种图就是微扰统计场论中著名的费曼图。当然，我们并不会讨论微扰统计场论，但值得说明的是，微扰统计场论其实就是我们考虑的扰动高斯分布的推广。只不过在统计场论中，我们需要考虑无穷多个随机变量，它们形成所谓的场算符，而我们这里仅仅只考虑一个随机变量。总之，微扰统计场论其实是我们将要考察的扰动高斯分布的无穷维推广。因此，这里发展的费曼图方法同样适用于微扰统计场论是毫不令人意外的。

## 1 高斯分布

首先考虑高斯分布。假设随机变量 $\Phi$  满足如下分布

$$P(\phi) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2\right), \quad (1)$$

式中 $\mathcal{Z}$ 为归一化系数。这就是高斯分布。对于这种分布我们很容易计算随机变量的特征，现在记为 $\mathcal{Z}[J]$

$$\mathcal{Z}[J] = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 + iJ\phi\right) \quad (2)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{J^2}{m^2}\right). \quad (3)$$

从这个表达式可以读出在所有的集团 $n$ 极矩中，只有集团2极矩 $K_2$ 非零，很显然 $K_2 = \frac{1}{m^2}$ 。

计算 $n$ 极矩的办法有两种，一种是将特征函数 $\mathcal{Z}[J]$ 在 $J = 0$ 处泰勒展开到 $n$ 阶，然后读出其展开系数即为 $n$ 极矩。很显然 $n$ 为奇数时结果为零。而对于偶数情形，比方说，对于 $2n$ 极矩 $M_{2n} = \langle \Phi^{2n} \rangle$ ，我们用这种办法可以得到

$$M_{2n} = \frac{(2n)!}{n!2^n} \frac{1}{m^{2n}}. \quad (4)$$

第二种计算 $n$ 极矩的办法是利用 $n$ 极矩的集团展开，由于非零的集团只有2集团，因此这就是将 $n$ 极矩按照2集团进行展开。具体的办法可以进行如下，画出 $n$ 个完全等同的点，每个点代表一个 $\Phi$ ，然后将这些点两两配对组合成2集团，每个2集团中的两个点用一根线连起来，这样就构成一个不完全连通的 $n$ 点图。每一个2集团的贡献是 $K_2 = 1/m^2$ ，将一幅集团展开图中所有集团的贡献乘起来就是这幅图对 $n$ 极矩的贡献。而将所有可能的集团展开图的贡献加起来就得到总的 $n$ 极矩。

很显然，按照这个办法，当 $n$ 为奇数时，任何集团展开中必然会涉及到1集团，而由于 $K_1 = 0$ ，所以1集团的贡献为零，因此最后总的 $n$ 极矩必然为零。对于 $2n$ 极矩，集团展开图有很多，每个图都包

含 $n$ 个2集团，但是由于这 $2n$ 个点完全等同，所有这些图的贡献都是一样的，都为 $1/m^{2n}$ 。那么一共有多少个集团展开图呢？这有多种不同的计算办法，最简单的一种是这样的：首先，随意标记这 $2n$ 个点中的任何一个，与之配对形成2集团的点有 $(2n - 1)$ 个不同选择，配对完成以后，再次在剩下的 $2n - 2$ 个点中随意标记一个，与之配对的点就有 $(2n - 3)$ 种可能，如此不断进行下去，直到所有点都完成了配对。很显然，可能的集团展开图数目为

$$(2n - 1)!! \tag{5}$$

很容易看出来 $(2n - 1)!! = (2n)!/(n!2^n)$ ，因此这种办法计算出来的最终结果与之前的第一种办法计算的结果完全吻合。

## 2 受扰动的高斯分布

下面我们假定随机变量 $\Phi$ 的分布为

$$P(\phi) = \frac{1}{\mathcal{Z}[g]} \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}g\phi^4\right), \tag{6}$$

$\mathcal{Z}[g]$ 来自于这个概率分布的归一化，很显然，这种概率分布的归一化计算起来很困难。不过，我们只是在形式上使用这一表达式，实际上 $g$ 应该理解为一个很小的参数， $\exp(-\frac{1}{4!}g\phi^4)$ 其实是对高斯分布的一个小扰动。

这一概率分布的特征函数，现在记为 $\mathcal{Z}[g, J]$ ，由下式给出

$$\mathcal{Z}[g, J] = \frac{1}{\mathcal{Z}[g]} \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}g\phi^4 + iJ\phi\right). \tag{7}$$

如果不把 $g$ 处理成微扰,  $\mathcal{Z}[g, J]$ 是很难计算的, 但它关于 $J$ 的泰勒展开同样是 $n$ 极矩, 并且 $\log(\mathcal{Z}[g, J])$ 关于 $J$ 的泰勒展开同样是集团 $n$ 极矩。

我们不妨来考虑 $2n$ 极矩 $M_{2n} = \langle \Phi^{2n} \rangle$ (根据被积函数的奇偶性,  $2n+1$ 极矩显然为零),

$$\begin{aligned} M_{2n} &= \frac{1}{\mathcal{Z}[g]} \int d\phi \phi^{2n} \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}g\phi^4\right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}[g]} \int d\phi \phi^{2n} \left[1 - \frac{1}{4!}g\phi^4 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4!}g\phi^4\right)^2 + \dots\right] \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2\right) \end{aligned}$$

显然计算的结果必然是一个关于 $g$ 的泰勒级数, 级数中每一项的计算都简化成了标准高斯分布情形的计算。因此前文所描述的2集团展开的办法依然完全适用, 但这样虽然能够计算出结果, 但相应的集团展开依然是高斯分布的集团展开, 而不是(6)的集团展开, 因此我们无法直接从中得到扰动高斯分布的集团多极矩。

注意到在我们现在考察的扰动高斯分布(6)中,  $-\frac{1}{4!}g\phi^4$ 是指数上的同一项, 它的四个 $\phi$ 肯定不应该被拆开, 尤其是不能拆开到不同的集团中去。因此, 现在我们引入一种新的办法来画集团展开图。在现在的画法中, 除了 $\phi^{2n}$ 所对应的 $2n$ 个点(这些点我们称之为外点)以外, 对于泰勒展开(8)中的每一个 $-\frac{1}{4!}g\phi^4$ 因子, 我们都在图中引入一个(而不是四个)不同的点, 我们称之为顶角, 因此每个顶角不是代表一个 $\Phi$ , 而是代表4个 $\Phi$ 乘在一起, 从上一节的研究中我们知道, 每个 $\Phi$ 都要和其它的 $\Phi$ 配对, 所以我们在每个顶角上画出四条腿, 每条腿代表一个待配对的 $\Phi$ 。对于(8)中 $g$ 的泰勒级数的每一阶, 当我们把所有的配对(同样, 每个配对画一条连线)都完成以后就生成了一幅不完全连通的图, 一组配对方式就对应一幅图, 这样的图称之为

费曼图。和前文一样，每一幅费曼图中的每一根代表配对的连线贡献都是 $1/m^2$ ，而每一个顶角额外还有一个 $-g$ 。将一幅图中所有连线和顶角的贡献都乘起来就是这幅费曼图对 $2n$ 极矩的贡献。将所有不同费曼图的贡献都加起来就得到 $2n$ 极矩的最终值。

读者可能注意到我没有提到顶角上的那个 $\frac{1}{4!}$ 因子，这是因为，当我们将顶角上的四个 $\Phi$ 和其它 $\Phi$ 进行配对时，一般来说这四个 $\Phi$ 的排列组合会产生 $4!$ 种可能性，刚好将 $\frac{1}{4!}$ 抵消了。除非我们画出来的费曼图对于某个顶角上的 $\Phi$ 的配对有对称性，这时候我们就要额外除以对称操作的数目(恒等操作也算一个对称操作)，因为对称的配对方式结果是完全一样的。同样的，上面我们也没有谈泰勒展开 $g^2$ 阶项前面的 $1/2!$ 因子，这是因为 $g^2$ 阶其实是两个顶角的乘积，一般来说，当将其它 $\Phi$ 与 $g^2$ 阶上的 $\Phi$ 进行配对时，两个顶角就产生了两种可能性，正好将 $1/2!$ 消去。除非我们画出来的费曼图这两个顶角是完全对称的，这时候就要额外除以对称操作的数目 $2$ 。总之，每一幅费曼图的贡献还要除以一个对称因子，它就是使得费曼图保持不变的对称操作的数目。

另外，很显然，不同拓扑结构的费曼图有不同的配对方式，而由于 $\Phi$ 的等同性，相同拓扑结构的费曼图对 $2n$ 极矩的贡献必定是相同的(有相同的连线数和顶角数)，因此对于每一拓扑类，我们常常只画一幅图为代表，然后在最终贡献中乘上一个拓扑权因子，它就是具有相同拓扑结构的不同费曼图的个数。

下面的两幅图(1)、(2)是将 $\langle\Phi^4\rangle$ 计算到 $g^2$ 阶所涉及到的所有费曼图，每幅图前面的数字是它的拓扑权因子除以对称因子。比如图(1)中(c)图的系数 $3 = C_4^2 \times \frac{1}{2}$ ，其中 $C_4^2$ 是从四个外点中选出两

个进行直接配对的组合数，而 $1/2$ 来自于图中那个圈的左右对称性。比如图(1)中(f)图的系数 $3/2$ 是因为将四个外点分成全同的两组(两组外点分别和一个顶角配对)有3种可能性，另外图中圈的对称性导致还要除以2。比如图(1)中(i)图的系数 $3/8 = 3 \times 1/8$ ，其中的 $1/8$ 是因为图中的双圈有8个对称操作。再比如图(2)中的(n)图的系数 $1 = C_4^2 \times (1/3!)$ ，其中的 $C_4^2$ 是四个外点中选出两个直接配对的组合数， $1/3!$ 是因为图中那个圈中的3根线具有重排对称性。类似的可以得到其它图前面的系数。

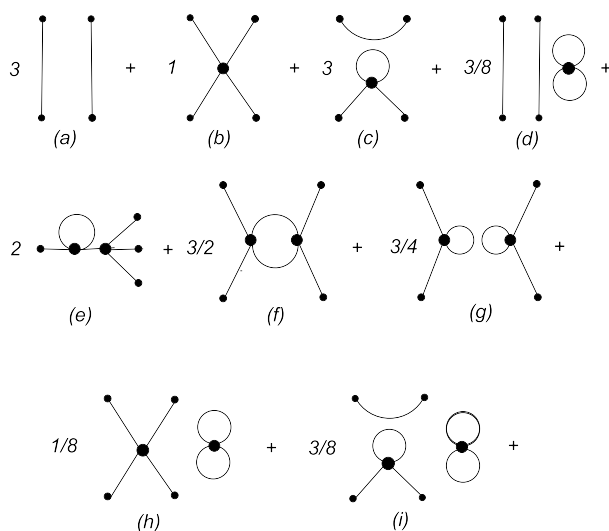


Figure 1: The feynman diagrams concern  $\langle \Phi^4 \rangle$ .

很容易看出来，上面这些费曼图的和可以因式分解成如下两部分，图(3)和图(4)，的乘积。人们可能注意到，这个乘积中还多出来

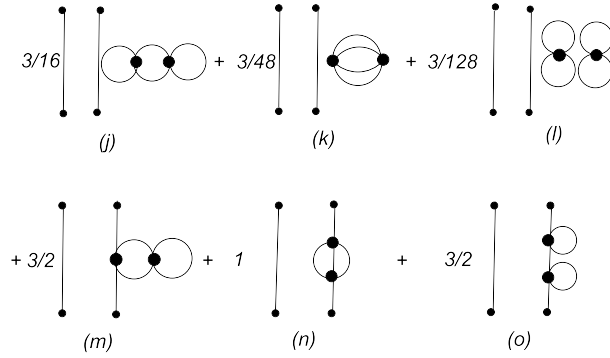


Figure 2: The feynman diagrams concern  $\langle \Phi^4 \rangle$ .

一些 $g^3$ 阶甚至 $g^4$ 阶的部分，这些部分是我们暂时不关心的。图(4)中的第一项那个 $I$ 表示单位1。另外，图(4)有一个特征，那就是它完全不涉及外点，我们称之为真空图。这些真空图实际上对最终结果是没有贡献的。原因就在于，我们回顾计算公式(8)，就会发现，要最后算出 $\langle \Phi^4 \rangle$ ，我们还需要除以 $\mathcal{Z}[g]$ ，而 $\mathcal{Z}[g]$ 来自于归一化，其计算也可以按照微扰展开的形式来进行，只不过这时候没有外点，稍微想一下我们就能明白，图(4)的这些真空图，就是计算 $\mathcal{Z}[g]$ 时所涉及到的那些费曼图。所以在最终计算 $\langle \Phi^4 \rangle$ 时，这些真空图的贡献就从分子和分母中消去了。因此，为了计算 $\langle \Phi^4 \rangle$ (到 $g^2$ 阶)，我们只需要将图(3)中的那些费曼图的贡献加起来。最后的结果容易计算得

$$\langle \Phi^4 \rangle = 3 \frac{1}{m^4} - 4g \frac{1}{m^8} + \frac{33}{4} g^2 \frac{1}{m^{12}}. \quad (9)$$

这个结果也可以不用费曼图方法，而是用直接的计算来验证(要记得除以 $\mathcal{Z}[g]$ )。

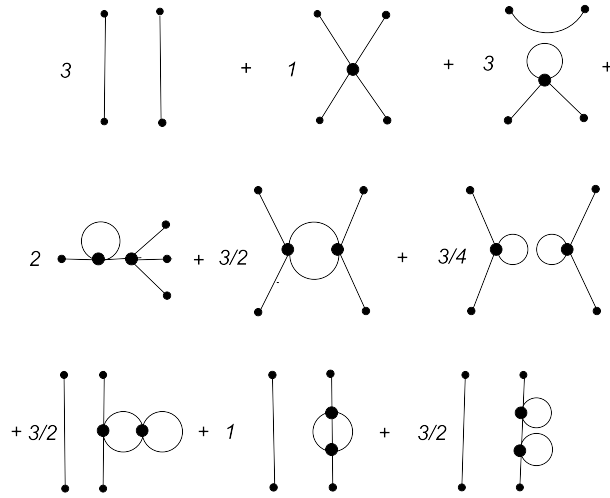


Figure 3: The feynman diagrams for calculating  $\langle \Phi^4 \rangle$ .

费曼图的方法在直接计算如 $\langle \Phi^4 \rangle$ 这样的多极矩时显示出来的方便之处还不够大。但如果我们想计算的是集团多极矩，比如 $K_4$ ，费曼图方法就会显得特别方便。为了说清楚这一点，让我们观察图(3)中的那些费曼图，我们发现，其中有些费曼图是连通图，因此四个外点属于同一个集团，而有些图是不连通的，其四个外点被分割成了不同的集团。也就是说，从图(3)中我们可以发现，通过顶角和连线的作用可以将四个外点自然地分割成集团展开结构，其中一个集团就对应费曼图中的一个连通部分。又考虑到按照 $g$ 的微扰展开，我们就可以说，集团多极矩对应的就是连通图的贡献之和。比如说 $K_4$ ，计算到 $g^2$ 阶，它就是图(1)中(b), (e), (f)三个费曼图的贡献之和，很



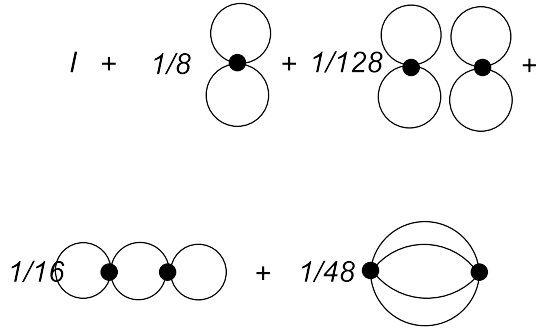


Figure 4: The vacuum diagrams.

容易算得

$$K_4 = -g \frac{1}{m^8} + \frac{7}{2} g^2 \frac{1}{m^{12}}. \quad (10)$$

总之，对于任何扰动高斯分布，其集团 $n$ 极矩 $K_n$ 其实就是 $n$ 个外点的连通图之和，因此我们也可以称之为连通 $n$ 极矩，并记作 $\langle \Phi^n \rangle_c$ ，即

$$K_n = \langle \Phi^n \rangle_c. \quad (11)$$

### 3 圈展开

读者可能发现了，上面画出的所有费曼图中，有些费曼图包含了闭合回路，我们称之为圈，而有些则没有。为了看清楚圈的含义我们再次修改概率分布，假设我们记 $S(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}g\phi^4$ ，那么我们将要考虑的概率分布为

$$P(\phi) = \frac{1}{\mathcal{Z}[g, h]} \exp\left(-\frac{1}{h}S(\phi)\right). \quad (12)$$

我们同样可以按照对参数 $g$ 的微扰展开来计算 $n$ 极矩和连通 $n$ 极矩，稍微想一下人们就能知道，现在所有的费曼图和上一节中的费曼图都是一样的，与我们在上一节中考察的情况的唯一区别在于，现在费曼图中每一根连线的贡献是 $h/m^2$ ，而每一个顶角的贡献是 $-g/h$ 。为了让 $h$ 的贡献平等地进入外点，现在假设我们要计算的是 $\langle \Phi^n \rangle_c / h^n$ ，也就是说每一个外点要额外贡献一个 $1/h$ 。假设我们正在考察的费曼图共有 $v$ 个点(包括外点和顶角)， $e$ 根连线， $l$ 个独立的圈，则很显然这幅费曼图会贡献一个 $h^{e-v}$ ，由连通图的欧拉公式可知，它就是

$$h^{l-1}. \quad (13)$$

也即是说，每一幅费曼图的圈的个数其实是它按照 $h$ 展开的阶数加1。

因此，如果我们假定 $h$ 是一个小量，那么在计算 $\langle \Phi^n \rangle_c / h^n$ 的时候，高圈图的贡献相比于低圈图的贡献就处在 $h$ 微扰展开的更高阶上，概率分布(12)按照 $h$ 进行微扰展开其实就是相应费曼图的圈展开。这个结论对于任何扰动高斯分布都是成立的。如果我们将 $\phi$ 看成是某个粒子的坐标， $S(\phi)$ 看成是这个粒子的势能， $h$ 看成是温度，那么(12)其实就是这个粒子在热平衡之后的概率分布，也就是所谓的玻尔兹曼分布。而我们考虑的圈展开其实就是一种低温展开。

## 4 复变量

现在，假设我们考察的是一个复随机变量 $\Phi$ ，其取值为 $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ ，

其中 $\phi_1, \phi_2$ 是两个实数, 相应的高斯分布为

$$P(\phi, \bar{\phi}) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp(-m^2 \bar{\phi} \phi). \quad (14)$$

很显然, 这个概率分布的特征函数可以计算得

$$\langle \exp(iJ\bar{\phi} + i\bar{J}\phi) \rangle = \exp\left(-\frac{\bar{J}J}{m^2}\right). \quad (15)$$

由此容易得到 $\langle \Phi \Phi \rangle = \langle \bar{\Phi} \bar{\Phi} \rangle = 0$ ,  $\langle \Phi \bar{\Phi} \rangle = 1/m^2$ 。也就是说,  $\Phi$ 仅仅在与其复共轭进行配对的时候才会有非零的贡献。这一点在我们考虑扰动高斯分布画费曼图的时候尤其重要, 这时候为了强调 $\Phi$ 只能与其复共轭进行连线我们常常在这个连线上加上一个箭头, 这个箭头从 $\Phi$ 指向 $\bar{\Phi}$ 。另外, 概率分布必然是实的, 因此我们不妨假定任何扰动高斯分布的顶角都是 $\bar{\phi}\phi$ 的函数, 而不仅仅是 $\phi$ 或者 $\bar{\phi}$ 的函数。这样一来在画微扰展开的费曼图的时候, 任何一个进入顶角的箭头都必然对应一个离开这个顶角的箭头, 因此, 从一个 $\Phi$ 外点出发顺着箭头的方向走必然会终止于某个 $\bar{\Phi}$ 外点。如此一来, 我们必然有, 在这样的扰动高斯分布中 $\langle \Phi \Phi \rangle = \langle \bar{\Phi} \bar{\Phi} \rangle = 0$ (画不出任何相应的费曼图)。这个结果也可以直接从对称性来证明, 这是因为, 如果我们的概率分布是 $\bar{\phi}\phi$ 的函数, 那么它在 $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi, \bar{\phi} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\phi}$ 的变换下就是不变的, 因此我们必然有 $e^{-2i\alpha}\langle \Phi \Phi \rangle = \langle \Phi \Phi \rangle$ , 由于 $\alpha$ 是任意的, 这就意味着 $\langle \Phi \Phi \rangle = 0$ , 类似的也可以证明 $\langle \bar{\Phi} \bar{\Phi} \rangle = 0$ 。

## 5 微扰统计场论

微扰统计场论可以看成是上面我们所考察的这一类问题的推广。只不过这时候我们有无穷多个随机变量, 它们形成某个欧氏空间(比方

说 $\mathbb{R}^1$ 上的场分布，我们可以用 $\Phi(x)$ 来表示这些随机变量， $x$ 表示欧氏空间上的坐标。 $\Phi(x)$ 的取值我们可以记为 $\phi(x)$ ，它是一个场，为了简单起见我们不妨假定这些随机变量的取值都为实数。统计场论的关键是给每一个场位形 $\phi(x)$ 都指定一个概率 $P[\phi]$ ，它由下面的式子给出，

$$P[\phi] = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp(-S[\phi]), \quad (16)$$

式中 $S[\phi]$ 的一个典型例子如下

$$S[\phi] = \int dx \left[ \frac{1}{2}((\partial_x \phi)^2 + m^2 \phi^2) + \frac{1}{4!} g \phi^4 \right]. \quad (17)$$

归一化常数 $\mathcal{Z}$ 通常被称作配分函数，它的计算方法是

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]), \quad (18)$$

这里的积分表示对所有的场位形进行求和，称作泛函积分。在当前，泛函积分还不是一个有精确定义的数学概念，如何严格地定义泛函积分是最为重要的待解决数学难题之一。不过在形式上，我们可以将泛函积分理解成对每个空间点 $x$ 上的场变量都进行积分，是一个无穷重积分，也即是说，在形式上我们可以将积分测度 $\mathcal{D}\phi$ 理解成， $\mathcal{D}\phi = \prod_x d\phi(x)$ ，这里的 $d\phi(x)$ 不表示对 $x$ 求微分，而是表示将 $x$ 点的场变量 $\phi(x)$ 本身看成是一个积分变量。

由于 $\Phi(x)$ 依赖于 $x$ ，所以原来的多极矩的概念就可以推广成多点关联函数的概念。比方说两点关联函数的定义如下

$$\langle \Phi(x)\Phi(y) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y) \exp(-S[\phi]). \quad (19)$$

我们可以用类似于前面发展的微扰展开的办法来计算多点关联函数。比方说，对于 $S[\phi]$ 由(17)式给出来的统计场论，我们可以将顶角项 $\int dx \frac{1}{4!} g \phi^4$ 看成是一个微扰项。很显然，(17)式去掉这一顶角项剩下的部分同样是某种高斯积分，通过计算这一高斯积分我们就能把两个不同点上的场进行配对。整个费曼图的画法和我们前文的讨论是类似的，不同的是，在计算每一费曼图对多点关联函数的贡献时采用的计算规则略微有些不同，比方说，在现在的情形中每一根代表配对的连线的贡献不再是一个简单的数了，再比方说，每一个顶角的贡献不再是一个简单的 $-g$ 了，而是还要包含一个对 $x$ 的积分。

实际上，我们前面发展的所有概念都可以平行地照搬到微扰统计场论中去。当然，微扰统计场论也有其自身的复杂性，在微扰统计场论中，费曼图的每一个独立的圈都会额外贡献一个积分，而这个积分往往是发散的，物理学家用重整化的办法来处理这一发散，以从中得出有意义的有限的结果。不过在数学上，这一问题还没有得到严格的处理，实际上，它和我们之前提到的泛函积分的严格数学定义问题密切相关，是有待解决的重大数学难题。当然，我们并不打算详细地讨论微扰统计场论，所以让我们就在这里停下来吧。