

# 非欧几何：奇妙的庞加莱圆盘世界（上）

陈童

你相不相信，也许在某个平行宇宙，所有的相似三角形必定全等，三角形的内角和小于180度，并且，任何三角形的都不可能无限放大，而是有一个面积最大的三角形。这个世界就是非欧几何的世界，其最简单的例子就是庞加莱圆盘世界。

庞加莱圆盘世界就是 $(x, y)$ 平面内的单位圆盘 $x^2 + y^2 \leq 1$ 。在生活于这个圆盘世界的人看来，两个邻近的点 $(x, y)$ 和 $(x + dx, y + dy)$ 之间的距离由下式给出

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}. \quad (1)$$

也就是说，同样的坐标差 $(dx, dy)$ ，在圆盘中心的人看来是一个很小的距离，而在圆盘边缘的人看来却是一个很大的空间距离，(1)包含了两点间距离的所有信息，称为度规。

奇妙的是，庞加莱圆盘世界的人眼中的直线(两点之间的最短线)不同于我们眼中的直线。比方说，连接圆盘边缘附近两点 $A, B$ 的直线(最短线)就不是我们眼中的直线，为了使得走过的距离尽可能短，一个从 $A$ 点出发的人不会直接走向 $B$ ，而是会将路径向着圆盘中心的方向弯，因为同样的坐标差在圆盘中心处对应更短的距离，因此让路径弯向圆盘中心可以节省距离。

比方说，如果我们考虑的这两个点 $A, B$ 就在圆盘边缘上，那么从(1)可以看出，直接沿着边缘从 $A$ 到 $B$ 将是一个无穷大的距离，因

为度规在边缘是发散的。从A出发，为了最快地走向B，你应该先沿着圆盘的径向走，以使得度规尽快地降下来，然后你再弯向B。实际上，庞加莱圆盘世界的直线是所有和圆盘边缘垂直相交的圆弧。

值得注意的是，在我们眼中，单位圆盘内的直线长度都是有限的，然而，在庞加莱世界的人看来，其直线的长度是无穷的，可以向两端无限延伸。为了看清楚这一点，我们不妨在单位圆盘上取极坐标 $(r, \theta)$ ，并且定义坐标变换 $r = \tanh(\rho/2)$ ， $\rho$ 取值范围是 $[0, +\infty)$ ，在变换以后的坐标中，度规的表达式(1)就变成了，

$$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2. \quad (2)$$

庞加莱圆盘的边缘现在变到了无穷远处，因此，在庞加莱圆盘世界的人看来，圆盘的边缘实际上意味着无穷远。我们也注意到，只要 $\rho$ 大到一定程度，(2)中度规的系数就一定大于1，因此 $\rho$ 坐标值的无穷远实际上也意味着度规距离的无穷远，因此，在庞加莱圆盘世界的人看来，其直线可以向着无穷远无限延伸。

那么，在庞加莱世界中，何为两条直线相互平行呢？通常的定义是，两条永远不相交的直线就是相互平行的，这当然正是我们在欧几里德平面几何中对平行线的自然定义。然而，稍微画画图你就能够看出来，如果这样定义平行，那么在庞加莱圆盘世界中，过直线外一点可以作无数条直线和已知直线平行。并且，庞加莱圆盘世界的两条平行线之间的距离并非固定不变。如果你从圆盘边缘出发，引两条在边缘处坐标值靠得很近的直线，假如这两条直线不相交，那么你可以很容易地看到，这样的两条平行线之间的距离会以一个恒定的速率增大。两条平行线之间的距离会越来越大实际上说明了庞

加莱圆盘世界是一个时空弯曲的世界，而且曲率是负的(如果曲率为正，那么邻近的平行线只会越来越远，比如球面上的两个大圆)。同时，平行线距离增加的速率为定值还说明庞加莱世界的曲率是一个常数，我们取为 $-1$ 。

现在，在庞加莱圆盘内取三条直线(三条和边缘垂直相交的圆弧)，它们将会交出一个三角形，很显然，这个三角形的内角和小于 $180$ 度。假如我们记这个三角形的内角和为 $\Delta$ ，那么高斯博内特公式告诉我们，

$$\Delta = \pi - S \quad (3)$$

式中 $S$ 表示这个三角形的面积。为了更好地理解这个公式，你可以在三维空间的单位球面上取一个由三个大圆组成的三角形，你会发现，对于球面 $S^2$ 上的这些三角形而言，其内角和 $\Delta$ 必定大于 $180$ 度，并且符合公式 $\Delta = \pi + S$ 。这是因为单位球面的曲率为 $+1$ ，所以面积对三角形内角和的修正是正的，而庞加莱圆盘的曲率为 $-1$ ，所以面积对三角形内角和的修正应该是 $-S$ 。

这就带来两个有趣的结论，第一，如果庞加莱圆盘世界的人只在很小的范围内活动，考虑的总是很小的三角形(边长 $\ll 1$ )，那么这些三角形的内角和就近似地等于 $\pi$ ，欧几里德几何近似地成立。第二，庞加莱圆盘世界的三角形面积有上限，最大值为 $\pi$ 。实际上，将面积最大的三角形的面积规定为 $\pi$ 就相当于给庞加莱世界定义了一把绝对的尺子，我们这里所谈的一切几何量其实都是用这把尺子作为单位量出来的。

庞加莱圆盘世界的哪些三角形有最大面积 $\pi$ 呢？答案非常简单，

所有三个角都落在圆盘边缘上的三角形面积都是 $\pi$ 。这是因为三角形必须由三条直线构成，而庞加莱圆盘世界的直线在圆盘边缘一定和边缘相垂直，这样一来，落在边缘的角的两条边只能相切，夹角为0。也就是说，三个角都落在圆盘边缘的任意三角形内角和必定为零，由(3)，这就意味着这些三角形的面积为 $\pi$ 。

现在，我们已经解释了庞加莱世界的一些不可思议之处，然而还有一个最令人吃惊的地方，即庞加莱世界中的相似三角形都是全等的，我们将这留到下一次再解释。